

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DES SCIENCES

INFLUENCE
DU FLUIDE ENTRAÎNÉ
SUR LA PÉRIODE D'OSCILLATION
D'UN PENDULE DE TORSION

APPLICATIONS A LA CHRONOMÉTRIE

THÈSE

PRÉSENTÉE A

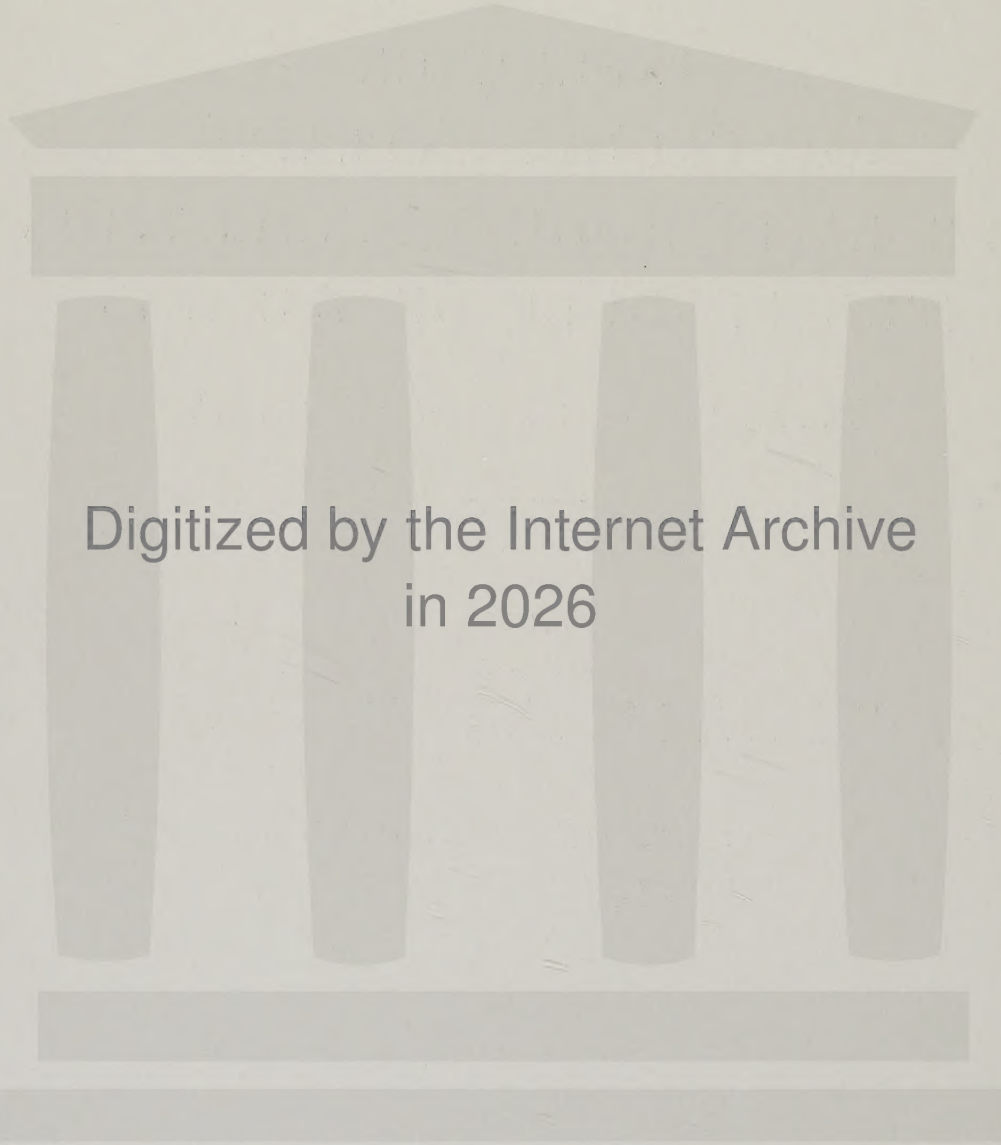
LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

CLAUDE ATTINGER

LICENCIÉ ÈS SCIENCES PHYSIQUES

1947



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555015_0043

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DES SCIENCES

INFLUENCE
DU FLUIDE ENTRAÎNÉ
SUR LA PÉRIODE D'OSCILLATION
D'UN PENDULE DE TORSION

APPLICATIONS A LA CHRONOMÉTRIE

THÈSE

PRÉSENTÉE A

LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

CLAUDE ATTINGER

LICENCIÉ ÈS SCIENCES PHYSIQUES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel sur les rapports de MM. les professeurs Adrien Jaquerod, Robert Mercier et Félix Fiala, autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 29 mai 1947.

Le doyen :

JEAN G. BAER

Ce travail a été exécuté de 1941 à 1947 au Laboratoire suisse de recherches horlogères à Neuchâtel. Il m'a été grandement facilité par la direction de cette institution qui n'a cessé de m'encourager dans mes travaux et n'a pas craint de prendre, cas échéant, à sa charge l'acquisition ou la construction des appareils qui m'ont été nécessaires.

Au professeur Adrien Jaquerod, directeur du Laboratoire, dont les conseils m'ont été très précieux et qui me guida avec compétence et bienveillance pendant ces années de recherches va l'expression de ma profonde gratitude.

M. Henri Mügeli, directeur-adjoint, s'intéressa vivement à mes travaux, je lui en exprime toute ma reconnaissance.

Enfin je tiens à remercier aussi MM. Ch. Rochat, mécanicien, et P.-A. Meylan, horloger, qui ont eu à cœur de construire avec un grand soin les parties essentielles, souvent fort délicates, de mes appareils.

Neuchâtel, le 29 mai 1947.

CLAUDE ATTINGER



Claude Attinger

Influence du fluide entraîné sur la période d'oscillation d'un pendule de torsion

Applications à la chronométrie

SOMMAIRE

Le mouvement du balancier d'un chronomètre ne s'effectue pas dans le vide, sa période d'oscillation est modifiée par la présence de l'air ambiant. Cet effet joue un rôle important en chronométrie, des variations d'altitude ou de la pression barométrique en un même lieu altérant la marche des montres de quantités dont il faut tenir compte dans le réglage de précision.

Pour permettre une étude plus approfondie du problème, les recherches ont porté tout d'abord sur un pendule de torsion dont l'équipage mobile interchangeable oscillait en milieu illimité ou limité. Un équipage à palettes orientables a permis d'étudier le rôle des vis du balancier. Des mesures ont été faites dans l'air, l'argon, le gaz carbonique et l'hydrogène, avec le pendule libre et pour de petites amplitudes, puis avec le pendule entretenu par un dispositif spécialement mis au point et donnant des amplitudes de 270^0 à 360^0 .

Ces mesures ont montré qu'en milieu illimité la variation de période du pendule est proportionnelle à la racine carrée de la pression, alors qu'en milieu limité la variation de période est proportionnelle à la pression.

Les mesures faites ensuite directement avec un chronomètre équipé spécialement dans ce but ont confirmé ces résultats.

En pratique, la courbe qui représente la marche de la montre en fonction de la pression barométrique est d'allure parabolique, comprise entre une parabole du 2^{me} degré (milieu illimité) et une droite (milieu limité) tendant vers l'une ou l'autre de ces deux courbes suivant le genre de calibre utilisé.

La possibilité est encore étudiée de réduire au minimum l'influence de la pression barométrique sur la marche des chronomètres.

INTRODUCTION

Le système réglant d'un chronomètre est composé d'une masse annulaire plus ou moins découpée, le **balancier**, très bien équilibrée et susceptible de tourner autour de son axe de révolution perpendiculaire au plan de l'anneau. A cet effet, le disque est rivé sur un arbre pivoté tournant librement dans des paliers empierés. Un ressort enroulé en spirale, le **spiral**, fixé par une extrémité à l'arbre du balancier et par l'autre en un point fixe, crée un couple de rappel proportionnel à l'angle d'écartement. Il permet au balancier d'osciller suivant un mouvement harmonique. Les oscillations sont entretenues par un ressort moteur agissant sur le balancier par l'intermédiaire du rouage et d'un dispositif spécial, l'**échappement**. C'est le rouage qui entraîne les aiguilles découpant le temps en intervalles égaux. L'amplitude des oscillations du balancier est voisine de 270°.

Le mouvement ne s'effectuant pas dans le vide, sa période d'oscillation est troublée par la présence du gaz ambiant. Cet effet joue un rôle important en chronométrie, des variations d'altitude ou de la pression barométrique en un même lieu altérant la marche des montres de quantités non négligeables.

Le présent travail est consacré à l'étude de ces phénomènes, c'est-à-dire à l'influence du fluide entraîné sur la période d'un système oscillant. Dans ce but, les recherches ont tout d'abord été entreprises sur un système aussi libre que possible, ce qui a permis de vérifier expérimentalement la théorie mathématique proposée par divers auteurs. Pour varier autant que possible les conditions expérimentales, les mesures ont été effectuées dans différents gaz et sous des pressions comprises entre 0,01 mm. de mercure et 4 atmosphères.

Les applications à la chronométrie font l'objet de la deuxième partie de ce travail.

* * *

De nombreuses recherches expérimentales relatives à l'influence de la pression atmosphérique sur la marche des montres ont déjà été publiées. Les unes sont des études systématiques faites en laboratoire, où les montres ont été soumises à des pressions très variables et souvent dans différents gaz. Certaines lois ont été proposées [1 à 17, et 21]¹. Les autres ont été limitées essentiellement à l'étude des documents fournis par les observatoires, sur la marche des chronomètres. Les variations de pression étant bornées aux seules variations naturelles de la

hauteur barométrique au lieu considéré. Des moyennes ont permis de déterminer approximativement l'effet des variations de la pression sur la marche des chronomètres [18-20].

Les recherches de A. Jaquerod [15] ont été les plus systématiques ; elles ont porté sur des chronomètres de différents formats, équipés de balanciers de formes variées. Les mesures ont été effectuées dans l'air, le gaz carbonique et l'hydrogène, sous des pressions passant de fractions de mm. de mercure à quelques atmosphères. Elles ont été complétées par des contrôles à la montagne (A. Jaquerod, H. Mügeli [16]). En voici les conclusions essentielles :

La période d'oscillation est fonction de la pression et de la viscosité du gaz entraîné suivant une loi d'ailleurs assez mal déterminée et variable selon les systèmes étudiés. La fonction marche-pression est en général d'allure parabolique. L'effet est toujours faible et n'excède pas, dans l'air à la pression ordinaire, 0,01 à 0,02 seconde par jour et par mm. de Hg, soit une variation de période de l'ordre du dix-millionième. L'effet se traduit par un retard quand la pression augmente. Les variations de marche sont d'autant plus petites que le diamètre du balancier est plus grand.

* * *

Une description sommaire du phénomène permettra de justifier la méthode utilisée dans le présent travail.

Le balancier et le spiral oscillent dans l'air, qui s'associe d'une part à leur mouvement et, d'autre part, le freine, créant un amortissement supplémentaire.

Le moment d'inertie du gaz entraîné s'ajoute à celui du balancier et modifie la période. Si :

T : période du système oscillant,

I : moment d'inertie,

C : couple élastique du spiral pour un radian ;

la période est représentée par l'expression :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}$$

Une augmentation de la pression entraîne une augmentation du moment d'inertie du système et se traduit donc par un allongement de la période, c'est l'**effet direct**.

En toute rigueur, il faudrait encore tenir compte du frottement créé, à peu près proportionnel à la

¹ Les chiffres entre [] renvoient aux références bibliographiques placées à la fin du travail.

vitesse et qui agit aussi sur la période par l'amortissement qu'il provoque. Pour un amortissement caractérisé par le décrement logarithmique δ , si T est la période du mouvement non amorti, la période du mouvement amorti vaudra :

$$T' = T \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}}$$

Mais, comme le montreront les expériences décrites plus loin, le décrement n'a jamais dépassé 0,01 ce qui se traduit par un accroissement de période $\frac{\Delta T}{T}$ d'environ un millionième. Comme la précision des mesures a été de l'ordre du cent-millième, la correction de période due à l'amortissement a pu être dans tous les cas négligée.

Par contre, le freinage éprouvé par le système réglant, variable avec la pression, diminue l'amplitude des oscillations. Le mouvement n'étant jamais parfaitement isochrone, il s'ensuivra un **effet indirect** sur la période par défaut d'isochronisme. Cet effet, qui dépend de la construction du chronomètre et des imperfections dans sa réalisation, ne peut se calculer a priori, mais doit être déterminé expérimentalement dans chaque cas. Cette action peut être assez considérable pour masquer complètement l'effet direct. Elle peut se manifester suivant les cas par une augmentation ou une diminution de la période avec la pression.

Ces raisons, et l'incertitude des conditions initiales, du fait d'un balancier de forme compliquée oscillant dans une enceinte aux limites mal définies, ont fait abandonner dans la présente étude la méthode de la « montre », du moins pour l'étude systématique du phénomène. Il a été fait usage d'un pendule de torsion, c'est-à-dire d'un corps de révolution suspendu à un fil et oscillant dans une enceinte bien définie géométriquement.

Un tel système, qui a pour lui sa simplicité, présente cependant dans sa réalisation de grosses difficultés. Il faudra entretenir le mouvement du pendule et pouvoir lui imprimer des oscillations d'une amplitude d'au moins 270°. Mais, qui dit entretien, dit également défaut d'isochronisme, c'est-à-dire variation de la période avec l'amplitude. Il a donc fallu trouver un dispositif d'entretien du mouvement maintenant l'amplitude constante à 1° près, quel que fût la pression du gaz ambiant, et gardant en outre l'effort moteur constant.

Un tel système, qui a pour lui sa simplicité, présente cependant dans sa réalisation de grosses difficultés. Il faudra entretenir le mouvement du pendule et pouvoir lui imprimer des oscillations d'une amplitude d'au moins 270°. Mais, qui dit entretien, dit également défaut d'isochronisme, c'est-à-dire variation de la période avec l'amplitude. Il a donc fallu trouver un dispositif d'entretien du mouvement maintenant l'amplitude constante à 1° près, quel que fût la pression du gaz ambiant, et gardant en outre l'effort moteur constant.

I

PARTIE THÉORIQUE

L'influence du fluide entraîné sur le mouvement d'un pendule de torsion a été très souvent utilisée pour la détermination du coefficient de viscosité des gaz.

O. Meyer [22, 23] fit l'étude mathématique de ce problème et utilisa pour cela un disque oscillant dans un milieu illimité. Maxwell [24] chercha à préciser les conditions en faisant osciller un ou plusieurs disques entre des plans fixes.

Depuis lors, de nombreux travaux ont été entrepris avec l'une ou l'autre méthode, le corps oscillant étant de formes variées (disque, sphère, cylindre). La bibliographie complète de ces travaux a été publiée par Pedersen [25], Reynolds [26] et Vogel [27]. Parmi les travaux contemporains il convient de citer ceux de Itterbeek et de ses collaborateurs [28 à 33], qui ont déterminé par la méthode de Maxwell la viscosité d'un certain nombre de gaz aux très basses températures et en fonction de la pression.

Dans tous les cas, la viscosité se mesure à partir de l'amortissement du mouvement du pendule dans le fluide étudié. La détermination de la période n'est nécessaire que pour le calcul du moment d'inertie de l'équipage mobile, ou parce que sa valeur est

utilisée dans l'expression donnant le coefficient de viscosité ; la détermination rigoureuse de la période n'est pas indispensable. Hoare [34] a tenté, sans succès d'ailleurs, de mesurer la viscosité des liquides à partir de la période d'un pendule de torsion.

Brillouin [45] a montré les difficultés de la théorie, et l'absence de solutions simples et rigoureuses même dans les cas les plus élémentaires : oscillations d'un plan ou d'une sphère.

Le but de la présente recherche est différent et le problème peut être posé de la façon suivante : un disque de rayon R et de hauteur L oscillant d'un mouvement sinusoïdal autour de son axe, dans un espace illimité, ou limité par une enceinte extérieure, mesurer l'influence du milieu entraîné sur la **période d'oscillation**.

Il faut remarquer d'emblée que, du point de vue expérimental, les déterminations demandent une grande précision. Dans la présente étude, par exemple, la précision des mesures est de l'ordre du cent-millième et la variation relative de la période dans les conditions ordinaires, de l'ordre du dix-millième. L'approximation des mesures est donc d'environ 10% dans les cas défavorables.

Pour cette raison, la théorie supportera certaines approximations et la mise en équations du phénomène s'en trouvera simplifiée.

Les auteurs cités plus haut n'ont, en général, pas relevé cet aspect du problème. Cependant Bouasse [46] a fait les approximations qui lui ont permis de calculer l'influence du milieu entraîné sur la période. Nous extrairons l'essentiel de ses calculs en les complétant, étant entendu qu'ils ne sauraient être considérés comme rigoureux. Dans bien des cas, la théorie sommaire rend suffisamment compte des résultats expérimentaux.

Dans l'étude mathématique qui suit, les oscillations du pendule de torsion seront toujours supposées sinusoïdales, non amorties, le pendule oscillant librement.

Quatre cas seront successivement envisagés :

1. Disque infiniment mince oscillant autour de son axe dans un milieu illimité.

2. Cylindre infiniment long oscillant autour de son axe dans un milieu illimité.

Ces deux cas permettront de calculer l'influence du fluide sur la période d'un disque d'épaisseur finie oscillant en milieu illimité.

3. Disque infiniment mince oscillant autour de son axe à faible distance d'un plan fixe.

4. Cylindre infiniment long oscillant autour de son axe concentriquement à un cylindre fixe de rayon un peu supérieur.

Ces deux derniers cas s'appliqueront à un disque de hauteur finie oscillant dans une enceinte fermée l'enveloppant complètement (milieu limité).

Dans les cas 1 et 3 la théorie suppose un disque de rayon infini, le passage au disque de rayon fini se fait en négligeant l'influence des bords. De même, dans les cas 2 et 4 le passage au cylindre de longueur finie se fait en négligeant l'influence des bords supérieur et inférieur.

Premier cas. Disque infiniment mince, milieu illimité [(46), pages 250 et 255].

Soient :

T : période d'oscillation du disque,

θ : élongation au temps t ,

θ_0 : amplitude,

Ω : vitesse angulaire au temps t ,

Ω_0 : vitesse angulaire maximum,

R : rayon du disque.

On a :

$$\theta = \theta_0 \sin nt \quad \text{avec } n = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Omega = \theta_0 n \cdot \cos nt = \Omega_0 \cos nt$$

Le gaz entraîné par le mouvement du disque oscille en bloc dans des couches parallèles infiniment

minces avec une période égale à celle du disque. Mais les particules du gaz oscillent avec une amplitude qui décroît rapidement d'une couche à la suivante en s'éloignant du disque et avec un retard croissant par rapport au mouvement de celui-ci.

Soit ω la vitesse angulaire d'une particule du gaz à une distance z du plan (z compté vers le bas).

Supposant nul le glissement du gaz au contact du disque :

$$\omega = \Omega \quad \text{pour } z = 0$$

et comme le milieu est illimité :

$$\omega = 0 \quad \text{pour } z = \infty$$

Soient encore : η : coefficient de viscosité du gaz, ρ : densité du gaz ; l'équation hydrodynamique relative au fluide est donnée par :

$$\eta \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

Cette équation est identique à celle de la conduction de la chaleur, elle amène à la solution :

$$\omega = \Omega_0 e^{-mz} \cos (nt - mz)$$

en posant pour simplifier :

$$m = \sqrt{\frac{\rho n}{2\eta}} = \sqrt{\frac{\pi \rho}{\eta T}} \quad I$$

Le mouvement du gaz est donc sinusoïdal et amorti selon une loi exponentielle. Il existe un déphasage fonction de z égal à mz .

Calculons le couple supplémentaire agissant sur le disque et dû au gaz entraîné. La tension tangentielle qui agit sur la surface du disque est à distance r :

$$T_{z=0} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

formule découlant directement de la définition de la viscosité.

La force élémentaire sur le disque à la distance r vaut :

$$2\pi r dr T$$

et le couple élémentaire :

$$dC = 2\pi r^2 dr T$$

En remplaçant T par sa valeur et en intégrant de 0 à R , le couple total sera :

$$C = -\frac{\pi R^4}{2} \eta m \Omega_0 (\cos nt - \sin nt)$$

qui peut également s'écrire :

$$C = -\frac{\pi R^4}{2} \eta m \left(\Omega + \frac{1}{n} \frac{d\Omega}{dt} \right)$$

Ce couple se compose de deux termes :

un terme proportionnel à la vitesse, il agit sur l'amortissement ;

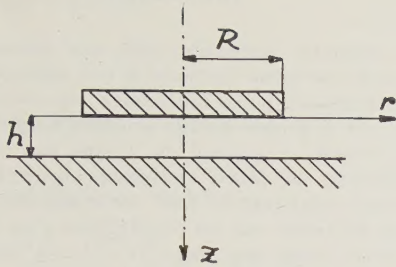


Fig. 1.

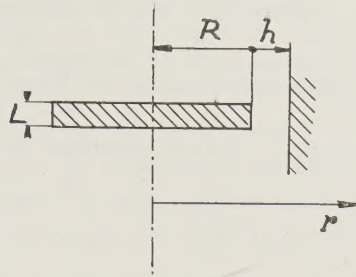


Fig. 2.

un terme proportionnel à l'accélération, il produit l'effet d'un accroissement du moment d'inertie du disque, il agira donc sur la période.

L'augmentation apparente du moment d'inertie du disque sera :

$$\Delta I_1 = \frac{\pi R^4}{2} \eta \frac{m}{n} = \frac{R^4}{4} \sqrt{\pi \rho \eta T}$$

et en tenant compte des deux faces du disque :

$$2 \Delta I_1 = \frac{R^4}{2} \sqrt{\pi \rho \eta T}$$

Si T : période dans le vide,

T' : période dans l'air ;

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I + 2\Delta I_1}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \sqrt{\left(1 + \frac{2\Delta I_1}{I}\right)}$$

$$T' = T \left(1 + \frac{\Delta I_1}{I}\right)$$

$$\frac{T' - T}{T} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{R^4}{4I} \sqrt{\pi \rho \eta T} \quad ^1$$

C'est la variation de la période, due au gaz entraîné, d'un disque oscillant, infiniment mince, sans tenir compte de l'influence des bords.

Deuxième cas. Cylindre de hauteur L et de rayon R , milieu illimité [(46), page 269].

Un calcul analogue au précédent donne pour l'augmentation apparente du moment d'inertie :

$$\Delta I_2 = R^3 L \sqrt{\pi \rho \eta T} \quad \text{III}$$

L'augmentation apparente totale du moment d'inertie pour le disque de rayon R et de hauteur L vaudra (formules II et III) :

$$\Delta I = 2 \Delta I_1 + \Delta I_2 = R^3 \left(\frac{R}{2} + L\right) \sqrt{\pi \rho \eta T} \quad \text{IV}$$

Enfin l'effet cherché sur la période d'oscillation du disque vaudra :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I} \quad \boxed{\frac{\Delta T}{T} = \frac{R^3}{2I} \left(\frac{R}{2} + L\right) \sqrt{\pi \rho \eta T}} \quad \text{V}$$

Troisième cas. Disque infiniment mince de rayon R , milieu limité [(46), page 260]. (Fig. 1)

Si h , distance du plan mobile au plan fixe, est assez petit (de l'ordre du millimètre), on peut supposer qu'il existe une décroissance linéaire de la vitesse du fluide entre les deux plans. Posant le glissement nul, on aura :

$\omega = \Omega$: au contact du plan mobile,

$\omega = 0$: au contact du plan fixe.

La vitesse d'une particule du gaz à la distance z sera dès lors :

$$\omega = \Omega \frac{h - z}{h}$$

avec : pour $z = 0$ $\omega = \Omega$

et pour $z = h$ $\omega = 0$

Pour évaluer l'action du gaz entraîné sur la période d'oscillation du disque, il faut calculer son énergie cinétique. Dans ce but, on déterminera l'énergie cinétique d'un tore de rayon r d'épaisseur dr et de hauteur dz . L'énergie cinétique totale s'obtient par une double intégration :

$$\int_{r=0}^{r=R} \int_{z=0}^{z=h} \pi \rho r^3 \Omega^2 \frac{(h - z)^2}{h^2} dr dz$$

¹ Cette formule a déjà été proposée par O.-E. Meyer [(22), p. 73].

qui donne en tenant compte des deux faces du disque :

$$\text{énergie cinétique du gaz entraîné} = \frac{\pi R^4}{3} \rho h \frac{\Omega^2}{2}$$

Au même instant, l'énergie cinétique du disque est :

$$I \frac{\Omega^2}{2}$$

Tout se passe donc comme si le moment d'inertie du disque avait augmenté de la quantité :

$$\Delta I_1 = \frac{\pi R^4}{3} \rho h \quad \text{VI}$$

Quatrième cas. Cylindre de rayon R et de hauteur L oscillant concentriquement à un cylindre de rayon un peu supérieur [(46), page 270]. (Fig. 2)

Soit h la différence des rayons des deux cylindres :

Ce cas se traite comme le précédent, il n'y a qu'une seule variable r .

En supposant de nouveau une décroissance linéaire de la vitesse du fluide entre les deux cylindres, il vient :

$$\omega = \Omega \left(\frac{R + h - r}{h} \right)$$

avec, pour $r = R$ $\omega = \Omega$

et pour $r = R + h$ $\omega = 0$

L'énergie cinétique du fluide en mouvement vaudra :

$$\frac{\pi \rho L \Omega^2}{h^2} \int_{r=R}^{r=R+h} [r^3 (R + h - r)^2] dr$$

c'est-à-dire en négligeant les termes en h^2 en regard des termes en h :

$$\text{énergie cinétique du gaz entraîné} = \frac{2}{3} \pi \rho L R^3 h \frac{\Omega^2}{2}$$

d'où pour ΔI_2

$$\Delta I_2 = \frac{2}{3} \pi \rho L R^3 h \quad \text{VII}$$

Les 3e et 4e cas permettent de déterminer l'augmentation apparente du moment d'inertie d'un disque de rayon R et de hauteur L oscillant concentriquement à une enceinte fermée à distance h des parois mobiles : (formules VI et VII)

$$\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2 = \frac{\pi}{3} \rho h R^3 (R + 2L) \quad \text{VIII}$$

d'où pour l'augmentation de la période :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\pi \rho h R^3}{6 I} (R + 2L) \quad \text{IX}$$

DISCUSSION

Les formules obtenues sont approximatives, l'influence de certains facteurs a été négligée ; c'est le cas notamment pour l'influence des bords. D'autre part, il est probable qu'aux grandes amplitudes, alors que la vitesse angulaire du disque est relativement considérable, la force centrifuge intervienne d'une façon non négligeable. Elle est d'ailleurs nettement mise en évidence par les oscillations d'un disque dans l'eau (voir plus loin page 14). Il n'a pas été tenu compte de l'effet de la force centrifuge sur la période.

Milieu illimité (formule No V) :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{R^3}{2 I} \left(\frac{R}{2} + L \right) \sqrt{\pi \rho \eta T}$$

Pour un pendule de dimensions données, la variation de la période est proportionnelle à $\sqrt{\rho \eta}$, c'est-à-dire à $\sqrt{P \eta}$, P étant la pression du gaz. Dans les limites ordinaires, de la pression et à température constante, η est pratiquement constant, l'influence sur la période est alors proportionnelle à $\sqrt{P}$.

L'influence est de plus proportionnelle à $\sqrt{T}$. Aux approximations consenties, l'influence sur la période est indépendante de l'amplitude.

L'influence, sur la période, des dimensions des équipages se calcule aisément, en supposant L proportionnel à R (disques semblables).

1) T constant, R , L et I variables.

Si k et k' sont des constantes :

$$\frac{\Delta T}{T} = k \frac{R^4}{I} = k' \frac{1}{R}$$

C'est ce qui se passe à peu près dans la montre où la période d'oscillation est constante ($T=0,4$ sec.), mais le balancier de dimensions variables suivant la grandeur du mouvement. Le spiral est alors choisi de manière à conserver le rapport $\frac{1}{C}$ constant. L'effet sur la période et les expériences faites par différents auteurs l'ont confirmé, doit être approximativement en raison inverse du diamètre du balancier.

2) T et I constants. R et L varient suivant la densité de la matière des équipages mobiles.

Si k est une constante :

$$\frac{\Delta T}{T} = k R^4$$

l'effet croît très rapidement avec le rayon du disque oscillant.

3) T , R et L constants, I varie suivant la densité de la matière des équipages.

Si k est une constante :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{k}{I}$$

l'effet est inversement proportionnel à I ¹.

Milieu limité (formule No IX):

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{R^3}{I} (R + 2 L) h \rho$$

L'influence, pour un pendule donné, est proportionnelle à la densité du gaz, donc à la pression. Elle est par contre indépendante de T et de η . Aux

¹ C'est ce qu'a montré approximativement Hérique [9].

approximations consenties, l'influence est toujours indépendante de l'amplitude. Par ailleurs les variations de dimensions de la masse oscillante agissent dans le même sens que précédemment.

L'effet est de plus proportionnel à h . Mais l'expression de $\frac{\Delta T}{T}$ n'est valable que pour h petit ; en augmentant h on passe insensiblement du régime où $\frac{\Delta T}{T}$ est proportionnel à P au régime où $\frac{\Delta T}{T}$ est proportionnel à $\sqrt{P}$.

Cette remarque explique les résultats souvent très capricieux obtenus par certains auteurs qui ont étudié l'influence du gaz ambiant sur la marche des montres, le balancier oscillant dans une enceinte de forme très compliquée.

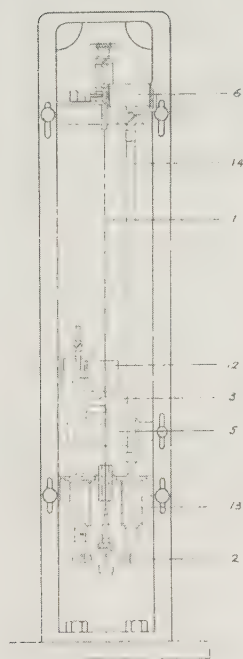


Fig. 3.

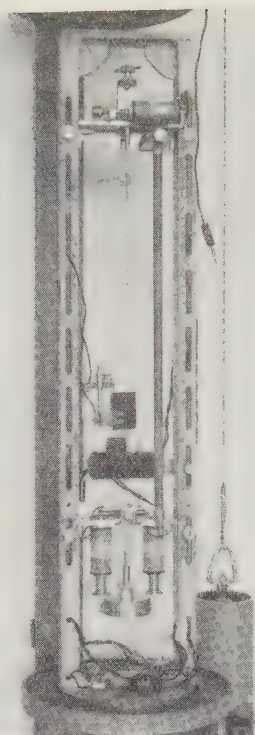


Fig. 4.

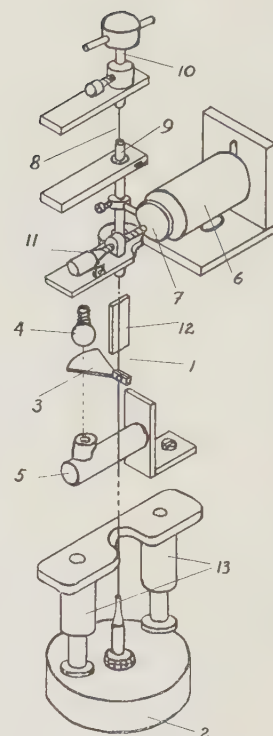


Fig. 5.

- 1 Fil de suspension
- 2 Equipage
- 3 Ecran mobile
- 4 Source lumineuse
- 5 Cellule photo-électrique
- 6 Electro-aimant d'entretien
- 7 Armature mobile

- 8 Ressort de rappel
- 9 Tête mobile
- 10 Tête fixe
- 11 Butée
- 12 Ecran isolant
- 13 Bobines d'amortissement
- 14 Thermomètre à résistance

II

DESCRIPTION DE L'APPAREIL

Généralités

Les figures 3 et 4 donnent une vue d'ensemble, à l'échelle, et une photo de l'appareil équipé avec un disque à ailettes.

La figure 5 donne une vue schématique en perspective.

La figure 6 indique le schéma des connections électriques.

Les figures 7, 8 et 9 représentent quelques vues de détail et la figure 10 une vue d'ensemble des installations.

Le pendule de torsion est formé d'un fil de métélinvar pour éviter une influence trop considérable de la température sur la période. Ce fil de 0,5 mm. de diamètre et de 423 mm. de longueur supporte

l'équipage mobile interchangeable. L'extrémité supérieure du fil est brasée dans une tête reliée au dispositif d'entretien. Celle-ci est fixée dans un cadre très rigide vissé sur une base stable fixée elle-même au mur. Tout l'appareil est enfermé dans une cloche en acier dont le diamètre intérieur est de 150 mm. Une fenêtre de 50 mm. de diamètre, fermée par une glace en verre trempé, permet l'observation du mouvement. Le soulèvement de la cloche est facilité par un contrepoids. L'étanchéité est obtenue par un anneau en caoutchouc, la cloche étant pressée contre la base par 6 serre-joints.

Pour permettre l'entrée des fils électriques indispensables, 3 trous ont été percés dans la base de l'appareil. 3 tubes en pyroténax à 4 conducteurs chacun y sont ajustés et soudés à l'étain.

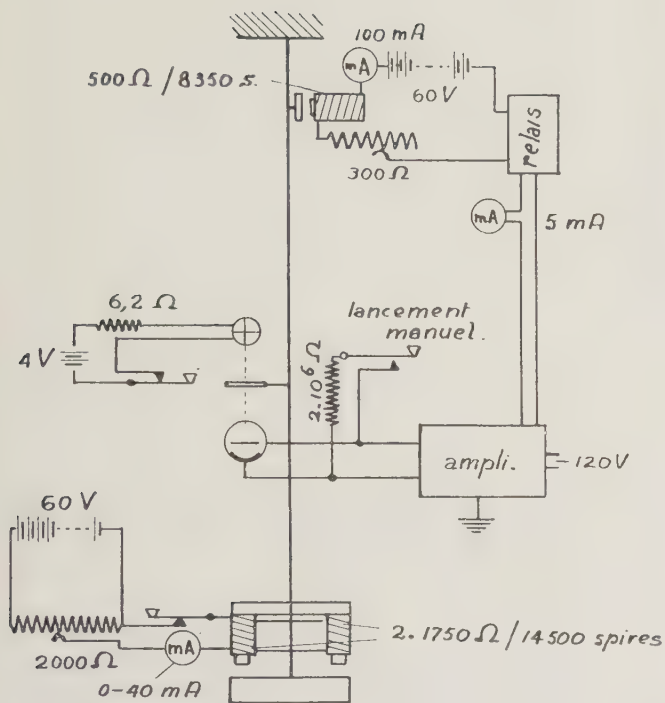


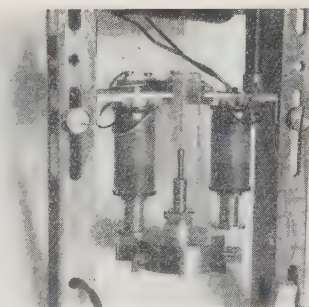
Fig. 6. Schéma des connections électriques



7



8



9

Fig. 7. Dispositif d'entretien

Fig. 8. Eclairage, écran et cellule photo-électrique

Fig. 9. Bobines d'amortissement et équipage mobile

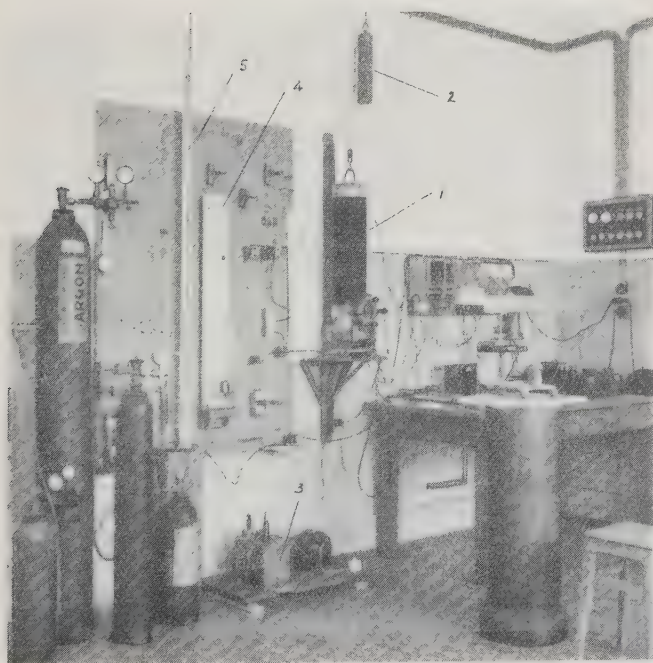


Fig. 10. Vue d'ensemble des installations

- 1 Appareil (pendule dans enceinte)
- 2 Contrepoids
- 3 Pompe à vide
- 4 Baromètre
- 5 Manomètre

Ces tubes¹ consistent en une forte enveloppe de cuivre de 11 mm. de diamètre remplis de magnésie comprimée servant d'isolant aux 4 conducteurs. Leur étanchéité a été obtenue par des bouchons de cire à cacheter coulés aux deux extrémités.

De façon à éviter tout contact mécanique avec la masse oscillante, l'entretien du mouvement est réalisé par rotation de l'extrémité supérieure du fil de suspension; il est commandé par le pendule au moment opportun. Cet entretien [(47), page 282], est sans influence sur la période s'il est donné à l'extrémité de la course du pendule (élongation maximum), mais une diminution si petite soit-elle de l'amplitude arrête son fonctionnement. R. Lavest [42] a déterminé l'influence de l'amplitude sur la période pour une impulsion se donnant à un moment quelconque de l'oscillation. Si :

θ_0 : amplitude de l'oscillation,

θ : élongation au moment de l'impulsion,

β : angle d'impulsion,

la variation de période, m , exprimée en secondes par jour, vaut :

$$43200 \left(\frac{\text{arc. cos } \frac{\theta}{\theta_0} + \text{arc. sin } \sqrt{\frac{(\theta + \beta)^2}{\theta_0^2 - \theta^2 + (\theta + \beta)^2}}}{\pi} - \frac{1}{2} \right)$$

Cette relation montre que l'influence est nulle, comme il fallait s'y attendre, si l'impulsion est donnée à l'extrémité de la course du pendule.

Il vient alors effectivement pour $\theta = \theta_0$

$$m = 43200 \left(\frac{\text{arc cos } 1 + \text{arc sin } 1}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Le tableau No 1 donne la variation de période en fonction de l'amplitude pour un angle d'impulsion de 5° et une élongation de 250° au moment de l'impulsion (valeurs calculées).

Tableau No 1

θ_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
250°	0
260	81,5
300	145,4
330	155,5
360	157,8
390	155,5
420	151,0

La figure 11 donne l'allure de la fonction. L'influence de l'entretien sur la période est nulle si l'impulsion se donne à l'extrémité de la course du pendule (amplitude de 250°); mais la tangente verticale en ce point indique que des variations même faibles de l'amplitude agissent beaucoup sur la période et qu'il n'y a pas intérêt à produire l'entretien au voisinage de l'élongation maximum.

¹ Société d'exploitation des câbles électriques S. A., Cortaillod (Neuchâtel).

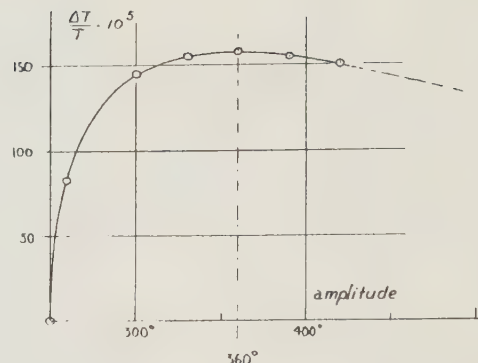


Fig. 11. Entretien par rotation de l'extrémité supérieure du fil de suspension

Angle d'impulsion : 5°.

Elongation lors de l'impulsion : 250°

La fonction passe ensuite par un maximum, très aplati, si l'angle d'impulsion est petit, et qui se situe alors pour une amplitude :

$$\theta_0 = \theta \sqrt{2}$$

Au voisinage de ce maximum la période du pendule entretenu est assez différente de celle du pendule libre, mais elle est pratiquement indépendante de l'amplitude. C'est au voisinage de cette élongation que devra agir le système d'entretien.

* * *

La tête supérieure mobile (9) (fig. 5), dans laquelle est brasé le fil de suspension (1), porte une armature en fer doux (7) et peut tourner très librement entre deux roulements à billes. Elle est suspendue à cet effet à un fil d'acier (8) de 0,5 mm. de diamètre et 20 mm. de longueur qui produit en même temps un couple de rappel et, dans la position de repos, maintient l'armature (7) contre une butée à réglage micrométrique (11).

Le pendule, lancé au préalable à la main, entraîne dans son mouvement l'écran (3) fixé sur le fil de suspension. Cet écran, très léger afin d'éviter les vibrations, est formé d'une feuille d'aluminium de 0,06 mm. d'épaisseur. Il démasque au moment opportun le faisceau lumineux, émis par une petite ampoule de 4 volts sous-voltée, qui tombe sur la cellule photo-électrique (5)¹.

Le courant émis par la cellule est amplifié par un amplificateur à un étage, il agit par l'intermédiaire d'un double système de relais sur l'électro-aimant (6) qui attire brusquement l'armature (7) en sens contraire du mouvement du pendule. C'est l'impulsion, caractérisée par l'angle d'impulsion réglable au moyen de la butée (11). Au cours des expériences, cet angle d'impulsion a varié entre 1° et 3° suivant les équipages et pour une amplitude de 270°; il a atteint exceptionnellement une valeur de 5° pour une amplitude de 360°.

¹Type Philips 3530.

Le double système de relais est combiné de telle façon qu'au retour du pendule, quand la source lumineuse est à nouveau masquée, l'armature continue d'être attirée. L'impulsion suivante n'est donnée qu'après une nouvelle action du faisceau lumineux sur la cellule, lors de l'oscillation symétrique de la première. A ce moment, l'électro-aimant libère l'armature qui retombe contre la butée (11). Il y a donc une impulsion toutes les demi-périodes. La position de l'écran vissé sur le fil de suspension, son angle d'ouverture, ainsi que le réglage de l'angle d'impulsion par la butée micrométrique, permettent d'ajuster l'amplitude à volonté.

Afin de rendre l'amplitude du mouvement indépendante de la pression dans la cloche, le dispositif suivant a été imaginé :

Deux électro-aimants (13) sont disposés symétriquement de part et d'autre du fil de suspension à une distance égale au rayon de l'équipage et à environ 10 mm. de sa face supérieure. Ces électro-aimants, excités par un courant continu réglable, freinent le mouvement de la masse par courants de Foucault. Au cours d'un même essai, la somme des amortissements dus à l'air entraîné et aux courants de Foucault est maintenue constante. Si la pression est augmentée, un rhéostat actionné à la main permet de diminuer l'excitation des électro-aimants et de maintenir l'amplitude invariable.

Le freinage dû aux courants de Foucault étant proportionnel à la vitesse, il s'ensuivra un amortissement caractérisé par un décrétement indépendant de l'amplitude. Son action sur la période, aisément calculable, est négligeable à la précision des mesures. Ce dispositif s'est montré très efficace, l'amplitude des oscillations a pu être maintenue constante à moins de 1° près au cours d'une série de mesures et pour des pressions variant entre quelques centièmes de millimètre de mercure et quelques atmosphères.

Cet appareil réalise ainsi une véritable horloge avec pendule de torsion, à force constante, dont la précision est de l'ordre du cent-millième soit environ une seconde par jour.

Au début d'un essai, le pendule est lancé à la main en actionnant l'électro-aimant d'entretien synchroniquement avec les oscillations du pendule. Le dispositif d'auto-entretien fonctionne dès que l'amplitude suffisante est atteinte.

Mesure de la période et de l'amplitude

La période est mesurée de deux façons différentes suivant que le mouvement du pendule se fait avec de grandes amplitudes (pendule entretenant), ou avec de petites amplitudes (pendule libre).

Aux **grandes amplitudes**, la période du pendule est ajustée à une valeur aussi voisine que possible de 2 secondes (au dix-millième près) au moyen de petites vis à tête noyée, placées en nombre variable sous la face inférieure de l'équipage oscillant. Les impulsions de courant données par la cellule photo-électrique agissent sur un microphone en liaison avec

une machine Gibbs¹. Un diagramme s'inscrivant sur une bande de papier permet, en quelques minutes, de connaître la période au cent-millième près.

Les disques oscillants portent sur leur pourtour des divisions de 6° en 6° permettant d'estimer l'amplitude à moins de 1° près au moyen d'une lunette munie d'un oculaire micrométrique.

Aux **petites amplitudes**, la période est réglée à une valeur voisine de 2,02 à 2,03 secondes. Le pendule porte un petit miroir concave sur lequel tombe toutes les secondes un éclair très bref traversant une fente fine et commandé par une horloge de précision donnant le temps moyen. L'image de la fente est reçue sur une échelle graduée transparente placée à 115 cm. du miroir. L'apparition périodique du spot lumineux sur le zéro de l'échelle permet de mesurer très exactement l'intervalle de temps entre deux coïncidences et d'en déduire la période d'oscillation. 20 coïncidences espacées de minute en minute permettent de déterminer la période au cent-millième près.

Un éclairage continu de la fente donne également la possibilité de mesurer l'amplitude des oscillations. Sur l'échelle placée à 115 cm., 4 cm. correspondent à environ 1° d'amplitude.

Mesure de l'amortissement

Aux **petites amplitudes**, l'amortissement se mesure simultanément avec la période, en lisant la diminution d'amplitude sur l'échelle graduée.

Aux **grandes amplitudes**, le mouvement étant entretenant, l'amplitude est constante. La détermination de l'amortissement ne peut s'effectuer simultanément avec la période mais se fait après coup dans une série de mesures complémentaires sous différentes pressions. Le pendule est lancé avec une amplitude initiale un peu supérieure à 360°, le temps et le nombre d'oscillations entre les amplitudes de 360° et 270°, le pendule s'amortissant librement, sont utilisés pour le calcul d'un décrétement moyen entre ces deux limites.

Mesure de la pression

Les pressions inférieures à la pression atmosphérique sont obtenues au moyen d'une pompe rotative de Leybold à deux étages. Les pressions jusqu'au millimètre de mercure sont lues sur un manomètre par comparaison avec un baromètre placé à côté et dont le réservoir est commun avec celui du manomètre. Les pressions en dessous du millimètre de mercure sont lues sur une jauge de Mac Léod permettant d'estimer le centième de millimètre, pression atteinte exceptionnellement.

¹ Cette machine utilisée pour déterminer la marche des montres, se compose essentiellement d'un moteur synchrone dont la vitesse est contrôlée par un quartz piézoélectrique. La comparaison entre la fréquence de rotation du moteur et celle des battements de la montre permet de mesurer très rapidement la marche de cette dernière.

Les pressions supérieures à la pression atmosphérique sont obtenues à partir de cylindres de gaz comprimés ; la pression se lit sur un manomètre libre à mercure dont la branche ouverte a 6 mètres de haut et s'étend sur deux étages du bâtiment. Les pressions ont atteint exceptionnellement 4500 mm., soit une pression d'environ 6 atmosphères ; en général, elles n'ont pas dépassé 4 atmosphères.

Mesure de la température

La température moyenne du pendule est donnée par un thermomètre à résistance de nickel placé à côté et sur toute la longueur du fil de suspension. Le fil de nickel de 0,09 mm. de diamètre a été recuit dans le vide à 750° pendant 30 minutes. Le thermomètre est formé d'une spirale de 11 mètres de ce fil enroulée sur un tube de bakélite de 10 mm. de diamètre et 390 mm. de longueur. Sa résistance à 20° est de 139,88 ohm et sa variation de 0,683 ohm par degré. La mesure de la résistance est faite au moyen d'un pont de Wheatstone par comparaison avec une boîte de résistances étalonnées. La précision de la mesure permet d'atteindre le centième de degré, la précision du dixième de degré a suffi dans tous les cas.

Un enroulement électrique extérieur à la cloche permet de chauffer l'appareil jusqu'à 500° en vue de déterminer le coefficient thermique du pendule.

Des dispositifs protecteurs particuliers, écrans absorbants et réfléchissants (12) ont été prévus afin d'empêcher la chaleur dégagée par la lampe et les bobines des électro-aimants de se transmettre au fil de suspension.

Fils de suspension

Le pendule est équipé de deux fils interchangeables donnant des périodes dans le rapport de 1 à 4.

Le fil No 1 donne avec tous les équipages une période voisine de 2 secondes.

Ce fil est en métélinvar, alliage à faible coefficient thermo-élastique, coulée F 4534 HT¹, diamètre 0,52 mm., longueur 423 mm. Il a été recuit à environ 600° durant 5 minutes par passage d'un courant de 3,5 ampères. La température a été estimée par comparaison avec celle d'un pyromètre optique mis au point dans ce but. Afin d'obtenir un recuit aussi homogène que possible, le fil était tendu horizontalement par deux poids de 2 kg. chacun dans un tube de verre de 40 mm. de diamètre. Cette opération avait un triple but : redresser le fil, en diminuer le frottement intérieur et en ajuster le coefficient thermo-élastique.

Le fil No 2 en métélinvar, coulée F 2291¹, destiné à donner avec les mêmes équipages une période de 8 sec., a été recuit dans les mêmes conditions. Son diamètre est de 0,25 mm., sa longueur est de 360 mm.

Equipages (fig. 12)

Plusieurs équipages ont été utilisés dans le but de mettre en évidence l'influence des dimensions et de la forme sur la période. Ils ont approximativement tous le même moment d'inertie qui a été déterminé pour l'un d'eux par la méthode de Gauss.

Avec le fil No 1 et la période de 2 sec. (pendule entretenu) le moment d'inertie est de 1095 g.cm².

Pour une période de 2,034 sec. (pendule libre et coïncidences espacées de minute en minute) le moment d'inertie est de 1130 g.cm².

Equipage A. Son but est d'obtenir un effet du fluide entraîné aussi grand que possible sur la période d'oscillation. C'est une pile de 6 disques en avional couissant sur un arbre de 12 mm. de diamètre et dont la distance, réglée par des rondelles en laiton, peut varier par demi-millimètre de 0 à 10 mm. Le diamètre de chaque disque est de 68 mm. ; leur épaisseur est de 3 mm. ; la masse totale y compris l'arbre est de 319,8 g.

Cet équipage peut également être muni de 9 disques de même diamètre et de 2 mm. d'épaisseur.

Equipage B. Disque en avional.

Equipage C. Disque en laiton.

Equipage D. Disque en verre organique (densité 1,18)².

Ces trois derniers équipages sont montés sur un arbre de 12 mm. de diamètre pesant 48 g. Leurs caractéristiques sont consignées dans le tableau suivant No 2 :

	Matière	diam. mm.	épais. mm.	masse g.	masse av. tête g.
Disque B	Avional	71,0	16,4	167,1	215,1
Disque C	Laiton	54,0	16,4	286,5	334,5
Disque D	Verre organique	87,3	16,4	113,0	161,0

Equipage E. L'équipage suivant a été utilisé afin de mettre en évidence l'influence d'aspérités de la masse oscillante sur la période et de se rapprocher des conditions réalisées en chronométrie (balancier à vis). Un disque en laiton de 53 mm. de diamètre et de 15,85 mm. d'épaisseur est monté sur un arbre de 12 mm. de diamètre. Il porte sur son pourtour 8 palettes en laiton disposées régulièrement et mobiles autour d'un axe radial. Les palettes ont 1 mm. d'épaisseur, leur longueur suivant leur axe de rotation est de 10 mm., leur largeur est de 9 mm. Le diamètre total de l'équipage est de 72 mm. ; sa masse est de 321,8 g.

L'orientation des palettes dans un même plan horizontal ou dans des plans verticaux permet en gardant constants la masse, la surface et le moment d'inertie de l'équipage, de réaliser des conditions d'amortissement très différentes.

¹ Fourni par les Fabriques de spiraux réunies à La Chaux-de-Fonds.

² Verre organique au méthacrylate, fourni par Lonza S.A., Bâle.

L'amortissement du pendule par les courants de Foucault a nécessité une étude spéciale des alliages utilisés quant à leurs propriétés magnétiques.

L'avional M¹ a la composition suivante :

Cuivre 3,5 à 5 %
Silicium 0 à 1,0 %
Manganèse 0,2 à 1,5 %
Fer + Zinc inférieur à 0,5 %
Aluminium : reste.

Les propriétés ferro-magnétiques de cet alliage sont de l'ordre de grandeur de celles du cuivre électrolytique pour conducteurs électriques. Il n'en a pas été tenu compte après les expériences faites avec le laiton.

Le laiton ordinaire s'est montré sensiblement ferro-magnétique, il était attiré en particulier par l'aimant. Pour cette raison, les disques en laiton ont été finalement confectionnés avec du laiton spécial AM². Sa susceptibilité magnétique, déterminée à l'Institut de physique de l'Université de Neuchâtel, a été trouvée égale à $-5,0 \cdot 10^{-6}$. Le laiton ordinaire a donné $+5,3 \cdot 10^{-4}$ dans un champ de 1380 gauss.

Les mesures de période faites par la suite avec les deux sortes de laiton ont donné d'ailleurs des résultats très voisins. Ceci a permis d'utiliser certains résultats obtenus auparavant avec les disques en laiton ordinaire et de négliger comme il a été dit plus haut les propriétés ferro-magnétiques des équipages en avional.

¹ Fourni par S. A. pour l'industrie de l'aluminium Chippis.

² Fourni par la fonderie Boillat S. A., Reconvilier.

Les mesures en milieu limité ont été effectuées tout spécialement avec le disque en avional. Une seule enceinte a été réalisée en verre organique transparent afin de permettre la lecture de l'amplitude. Le diamètre intérieur de cette enceinte est de 75,3 mm., sa profondeur est de 18,5 mm. L'épaisseur du fluide entre le disque mobile et l'enceinte est donc voisine de 2 mm. Cette enceinte a également servi pour quelques mesures avec le disque à palettes.

L'influence de la température sur la période du pendule, c'est-à-dire le coefficient thermique, a été déterminée avec le fil de suspension No 1 et des disques en avional et en laiton entre 18° et 50°. La variation de période est linéaire entre ces deux températures. Le coefficient thermique moyen vaut :

avec l'avional : $-0,45 \cdot 10^{-5}$

avec le laiton : $-0,58 \cdot 10^{-5}$.

(Le signe — indiquant que la période diminue quand la température augmente.)

Avec le fil de suspension No 2 et un disque en avional, le coefficient thermique moyen entre 20° et 40° est : $-2,9 \cdot 10^{-5}$.

L'ajustement du coefficient thermo-élastique a donc été dans ce cas moins bien réalisé qu'avec le fil No 1 ; mais avec le fil No 2 les mesures n'ont été faites qu'aux petites amplitudes sans entretien, la température pouvait être maintenue très constante ; l'inconvénient d'un coefficient thermique un peu fort disparaissait.

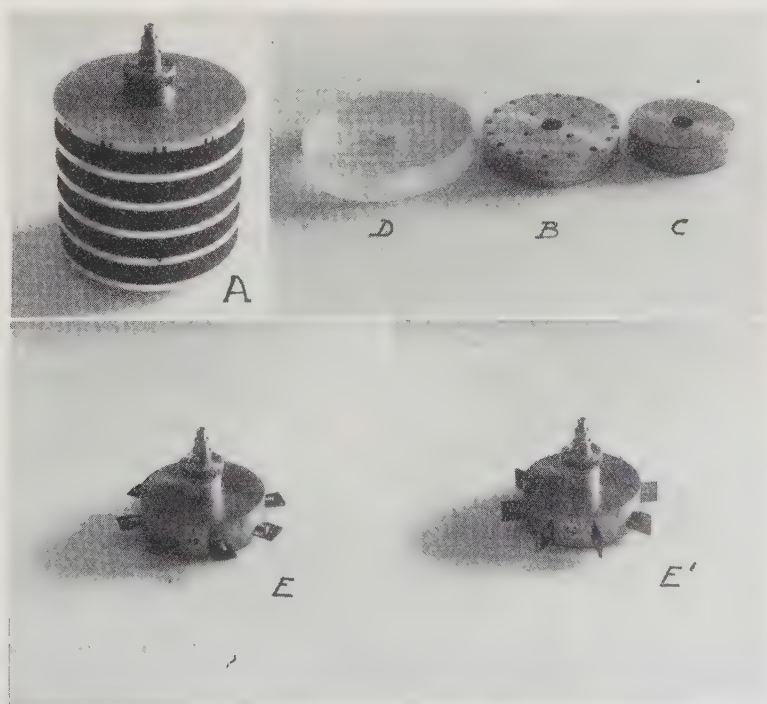


Fig. 12.

Equipages mobiles

A pile de 6 disques

B disque en avional

C disque en laiton

D disque en verre organique

E disque à palettes, orientées horizontalement

E' le même, palettes orientées verticalement

PARTIE EXPÉRIMENTALE

Mise en évidence du mouvement du fluide

L'observation du mouvement du fluide autour de l'équipage oscillant devait faciliter la compréhension des phénomènes étudiés. Dans un gaz, le mouvement peut être mis en évidence par de la fumée de cigarette, il est, sauf dans de rares cas, difficile

A cet effet, le dispositif suivant a été réalisé (fig. 13). Sa récente mise au point a permis d'obtenir déjà des résultats intéressants.

Des disques (D) en verre organique transparent oscillent dans l'eau avec une vitesse et une amplitude réglables à volonté. Le mouvement sinusoïdal est réalisé d'une façon très suffisante par un moteur

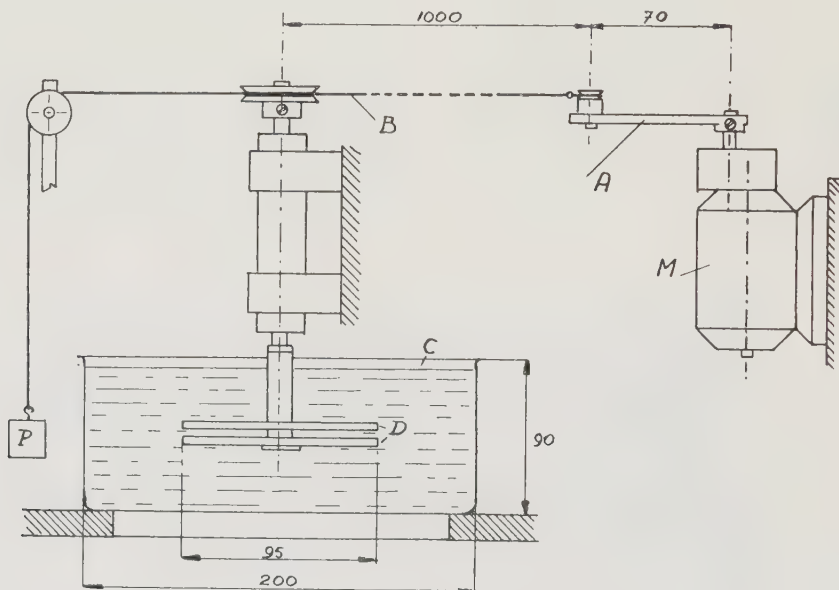


Fig. 13. Appareil pour la mise en évidence du mouvement du fluide (eau)

à observer. Dans un liquide, au contraire, l'observation est beaucoup plus aisée, les mouvements peuvent être suivis par le déplacement des filets liquides colorés d'une façon appropriée¹.

¹ A. Foch-J. Bariol [43] ont indiqué une méthode utilisant le déplacement de particules en suspension dans le liquide, déplacement mis en évidence photographiquement par des poses d'une durée portant sur plusieurs oscillations du pendule.

(M) à vitesse réduite entraînant les disques au moyen d'une manivelle (A) de 70 mm. de longueur et d'une longue bielle (B) formée d'un fil souple de 1000 mm. de longueur. Un contrepois (P) assure la tension du fil. Les disques sont immergés dans une cuve (C) remplie d'eau. Des petits godets de 2 mm. de diamètre et 1 mm. de profondeur sont creusés sur une face des disques ; ils sont remplis de colle d'amidon contenant quelques cristaux de violet cristallisé dont

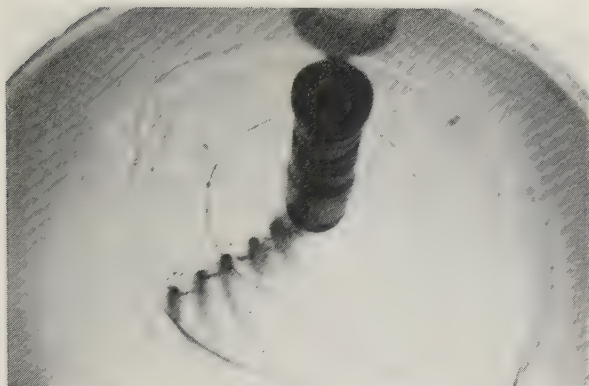


Fig. 14

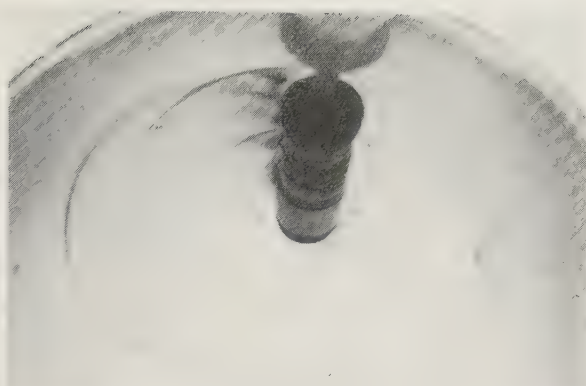


Fig. 15

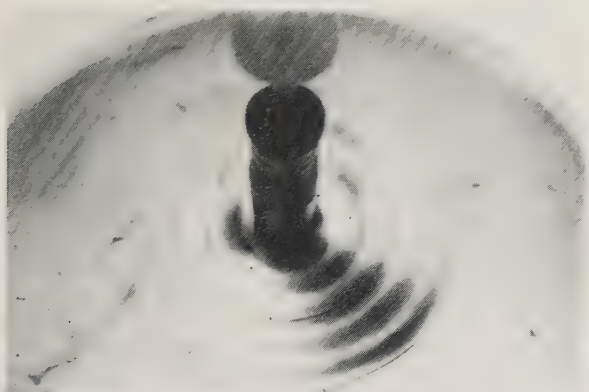


Fig. 16



Fig. 17

Fig. 14 à 17. Mouvement de l'eau autour des disques oscillants

Fig. 14 et 15. 1 disque en milieu illimité

Fig. 16. 2 disques à 2 mm de distance

Fig. 17. 1 disque à 4 mm d'un plan fixe

la dissolution lente dans l'eau dessine les mouvements des filets liquides pendant l'oscillation.

Pour que les mêmes conditions hydrodynamiques soient réalisées dans l'air et dans l'eau, la vitesse dans chaque fluide doit être proportionnelle au rapport $\frac{\eta}{\rho}$ (Reynolds). Pour l'air et l'eau à la température de 20° et à la pression ordinaire, les valeurs sont les suivantes :

			η	ρ	air rap. eau
air	$0,18 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0,15		
eau	0,01	1,0	0,01		15

Si la période dans l'air est de 2 sec., elle devra être dans l'eau à amplitude égale de 30 sec.

Les figures 14 à 17 montrent quelques résultats obtenus avec ce dispositif (pose $\frac{1}{25}$ de sec.).

Fig. 14 : Un disque oscille en milieu illimité avec une amplitude de 270°; l'effet de la force centrifuge apparaît nettement, les filets colorés qui s'échappent des godets s'éloignent du centre de l'équipage.

Fig. 15 (mêmes conditions) : Un filet coloré se déplaçant à l'extérieur du disque montre l'écoulement laminaire du liquide, il n'y a pas de formations tourbillonnaires.

Fig. 16 : 2 disques à 2 mm. de distance oscillent avec une amplitude de 270° sans qu'on puisse déceler

un effet de la force centrifuge ; les filets colorés se déplacent concentriquement au mouvement des disques.

L'examen direct montre en outre que l'effet de la force centrifuge va en croissant avec l'écartement des disques. Pour une distance de 5 mm., les filets liquides s'éloignent du centre de l'équipage au voisinage de la surface des disques et convergent vers le centre dans un plan situé à mi-distance.

L'influence de la force centrifuge diminue avec l'amplitude et n'est plus guère sensible pour des amplitudes inférieures à 45°.

Fig. 17 : Un disque oscille à 4 mm. d'un plan fixe. Sur le disque mobile (points M) apparaît un déplacement centrifuge des filets colorés, sur le plan fixe (point F) un mouvement centripète ramène les filets vers le centre. Le liquide s'échappe donc au voisinage de la surface du disque mobile vers l'extérieur, il revient au centre vers le voisinage de la surface du plan fixe.

Dans tous les cas, le déphasage du mouvement dans les couches parallèles s'observe très bien.

Avec un équipage à palettes disposées dans des plans verticaux et pour une amplitude de 270° le mouvement du liquide est tourbillonnaire.

Etude de l'amortissement

Bien que dans la plupart des essais l'amortissement du mouvement fût mesuré, seuls ont été retenus dans cette étude les résultats nécessaires au but recherché.

Un mouvement harmonique amorti est caractérisé par son décrément logarithmique δ :

$$\delta = \frac{\ln \theta_0 - \ln \theta_n}{n}$$

où : θ_0 et θ_n sont deux amplitudes séparées par un nombre n d'oscillations.

δ est constant, c'est-à-dire indépendant de l'amplitude, si le frottement qui produit l'amortissement est proportionnel à la vitesse. C'est le cas des vitesses petites et du mouvement laminaire du fluide. Par contre, quand le frottement est proportionnel au carré de la vitesse, le décrément varie d'une façon linéaire avec l'amplitude [(49), page 122].

Le décrément logarithmique, exprimé en logarithmes naturels, a été mesuré, à différentes pressions dans l'air, en fonction de l'amplitude. Le pendule était équipé du disque en avional B et oscillait librement. La fig. 18 rend compte des résultats pour des amplitudes décroissantes à partir de 360°. Les courbes représentant le décrément sont caractérisées par un maximum pour une amplitude d'environ 120°.

Deux causes essentielles produisent l'amortissement : le frottement intérieur du fil de suspension et le frottement provenant du gaz entraîné.

Il est naturel de penser qu'aux très faibles pressions, l'amortissement est dû essentiellement au frottement du fil, ou en tout cas, qu'il lui est proportionnel. La courbe d'allure compliquée montre, contrairement à ce que l'on pourrait croire, que le frottement intérieur du fil utilisé varie notablement avec l'amplitude. A cet égard, un fil de suspension en acier aurait été certainement supérieur, mais son coefficient thermique de l'ordre de 15.10^{-5} le rendait impropre à ces recherches.

L'amortissement dû au fluide entraîné seul s'obtient en soustrayant de l'amortissement total celui provenant du frottement intérieur du fil (courbe sous 0,02 mm. de Hg). Il est indiqué pour quelques pressions sur la fig. 19.

Le décrément logarithmique alors sensiblement constant, surtout aux faibles pressions, indique que le frottement est proportionnel à la vitesse, justifiant les approximations faites dans la partie théorique concernant l'écoulement laminaire du fluide autour du disque en rotation.

Le pendule équipé avec le disque à palettes, orientées dans des plans verticaux, donne pour une pression de 2000 mm. de Hg un décrément, dû au fluide seul, représenté sur la fig. 19. Il varie à peu près linéairement avec l'amplitude indiquant un frottement proportionnel au carré de la vitesse, dû vraisemblablement aux tourbillons formés par le brassage de l'air par les palettes. Il est naturel de penser que la théorie ne s'appliquera plus guère à ce cas. Aux faibles amplitudes la courbe représentative du décrément s'incurve vers une droite horizontale montrant qu'à ces vitesses l'écoulement du gaz tend à redevenir laminaire.

Enfin, certains résultats concernant la variation du décrément aux très faibles pressions seront donnés au paragraphe suivant.

Etude de la période

Pour rendre la lecture des graphiques plus aisée, les variations relatives de la période sont rapportées, par extrapolation, à la variation de la période supposée nulle dans le vide. Elles sont exprimées en cent-millièmes. Le signe + indique une augmentation de la période.

Une première série de mesures effectuées à très basses pressions en présence de pentoxyde de phosphore¹ a montré qu'il n'y avait pas d'anomalie de la période dans cette région, bien qu'une anomalie notable dans la courbe d'amortissement fût observée ainsi que le montre le tableau No 4 résultant d'une série de mesures effectuées sur le pendule muni du disque de laiton C. Le pendule oscillait librement avec une amplitude d'environ 1°.

¹ G. Kellström [38] a montré qu'à la pression ordinaire la viscosité de l'air était diminuée de 0,22 % pour de l'air saturé d'humidité. Aux faibles pressions, la différence est notablement plus grande.

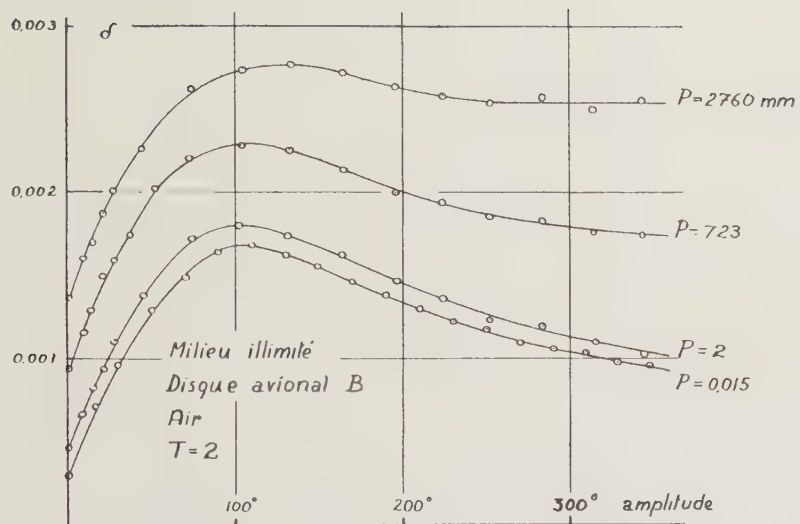


Fig. 18

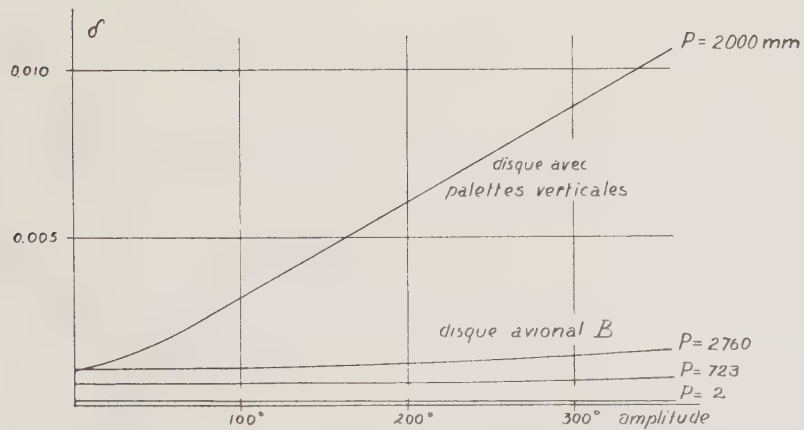


Fig. 19

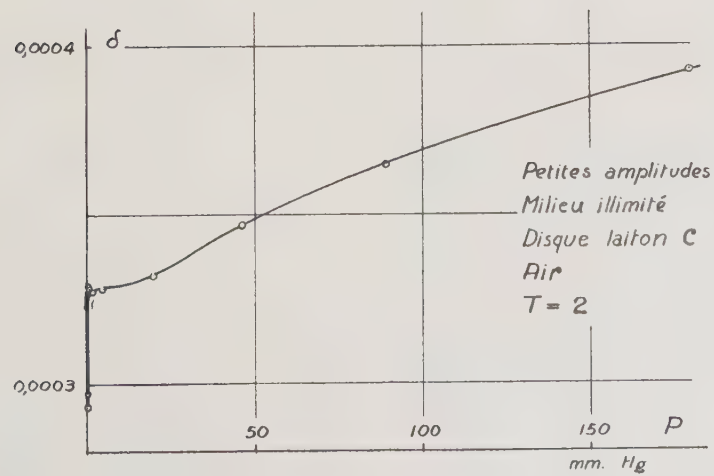


Fig. 20

Tableau No 4

Jour	Pression mm Hg	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
1er	0,025	+ 0,9	0,000297
	0,025	+ 1,0	0,000293
2ème	0,30	+ 0,6	0,000329
	0,90	+ 0,7	0,000328
3ème	1,8	+ 0,9	0,000327
5ème	4,8	0,0	0,000328
	20,0	+ 0,4	0,000332
	46	+ 0,7	0,000347
	89	+ 1,0	0,000365
6ème	180	+ 1,3	0,000393
	357	+ 1,9	0,000431
	727	+ 2,9	0,000496
	1500	+ 4,6	0,000593
7ème	2211	+ 3,8	0,000654
	2768	+ 4,9	0,000694
	0,09	- 0,8	0,000293

La fig. 20 résume les mesures se rapportant aux variations du décrément avec la pression. La discontinuité apparaît nettement aux faibles pressions (inférieures au mm. de Hg) ; elle est précédée d'un court palier dont l'origine n'a pas été nettement expliquée¹.

La fig. 21 qui donne la variation du décrément en fonction de la pression dans trois autres cas, précisés en regard des courbes, met en évidence la même anomalie.

Kundt et Warburg [36] attribuent cette brusque discontinuité à un glissement au voisinage de la surface mobile, glissement proportionnel au libre parcours moyen des molécules du gaz, donc négligeable aux pressions moyennes².

Ce n'était pas le but de ces recherches de préciser davantage ces différents points qu'il était nécessaire cependant de signaler.

Le tableau No 4 montre en outre qu'en fonction du temps, la période du pendule se modifie lentement pour des causes d'ailleurs mal définies (instabilité dans le réglage de l'entretien ou dans la position de l'écran), mais indépendantes de la température qui était de 22° au début et 21,5° à la fin de l'expérience. Pour cette raison, les essais ont toujours porté, par la suite, sur un espace de temps aussi court que possible ; les résultats ont été de ce fait beaucoup plus réguliers.

L'influence de la température sur l'effet de pression et de viscosité s'est montrée très faible, ainsi

qu'on pouvait s'y attendre, la densité du gaz à pression constante variant en raison inverse de la température absolue, alors que la viscosité n'est pas tout à fait proportionnelle à la température absolue (Sutherland).

Le tableau No 5 donne les résultats obtenus avec le pendule entretenu, l'équipage mobile étant formé d'une pile de 9 disques espacés les uns des autres de 2 mm. ; l'amplitude était de 360°.

Tableau No 5
Température 27,8°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
3	0,0
724	+ 10,9
1634	+ 31,0
2560	+ 49,6
Température 44,8°	
Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
4	0,0
724	+ 12,5
1649	+ 31,5
2554	+ 48,2

¹ L'allure de la courbe est tout à fait semblable à celle obtenue par R.-V. Wagner [35].

² Voir aussi à ce sujet J.-L. Hogg [37].

Tableau No 6

	$\rho_{20^\circ} \cdot 10^3$	$\eta_{20^\circ} \cdot 10^3$	$\sqrt{\rho \eta} \cdot 10^3$	$\sqrt{\rho \eta}$ rapp. à l'air	ρ rapp. à l'air
Air	1,205	0,182 [39]	0,468	1,00	1,00
CO ₂	1,842	0,146 [40]	0,519	1,11	1,53
A ¹	1,639	0,219 [40]	0,599	1,28	1,36
H ₂	0,084	0,087 [41]	0,086	0,18	0,07

¹ La densité indiquée est celle du mélange d'argon et d'azote, la viscosité est celle de l'argon pur.

La variation de période entre le vide et la pression maximum est de $49,6 \cdot 10^{-5}$ dans le premier cas et de $48,2 \cdot 10^{-5}$ dans le deuxième cas. La loi de variation de la période est très semblable dans les deux cas.

* * *

Les mesures ont été effectuées en général dans quatre milieux différents, de façon à varier autant que possible la densité et la viscosité du milieu ambiant.

Les quatre gaz utilisés ont été les suivants : air, gaz carbonique, argon (mélange à 95,4% d'argon et 4,6 % d'azote) et hydrogène. Leurs caractéristiques sont consignées dans le tableau No 6 ci-dessus (pression 760 mm. Hg) :

Deux séries de mesures ont été effectuées :

La première série avec le pendule oscillant librement et pour des amplitudes de l'ordre de 1°.

La deuxième série avec le pendule entretenu et pour une amplitude de 270°, amortissement supplémentaire par courants de Foucault. Dans cette série, les mesures n'ont pu être effectuées avec le fil de suspension No 2, donnant une période de 8 sec., le dispositif d'entretien ne fonctionnant pas régulièrement dans ce cas. De même l'équipage en verre organique D n'a pas été étudié, l'amortissement par courants de Foucault ne pouvant agir que sur un équipage métallique.

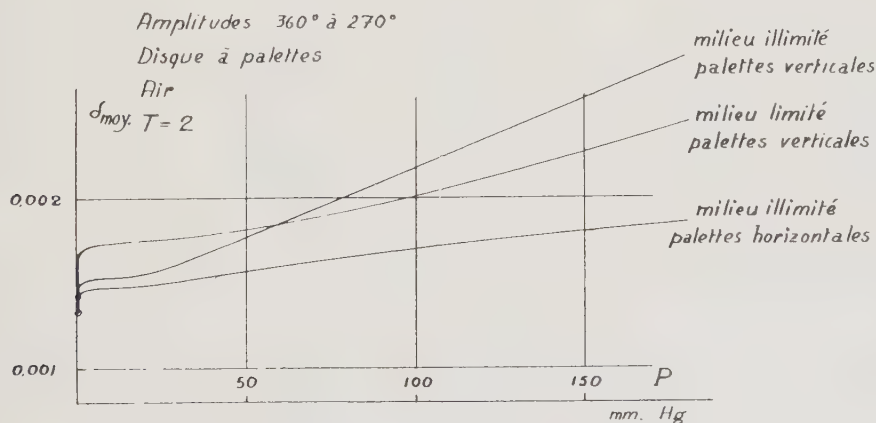


Fig. 21

PREMIÈRE SÉRIE DE MESURES

Pendule libre, petites amplitudes

A. Milieu illimité

Equipage : pile de 6 disques

Tableau No 7

Air T = 2 sec.

Disques en contact, temp. : 18°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
4	0,0
102	+ 2,8
407	+ 5,8
729	+ 7,9
2765	+ 15,0
2176	+ 12,2
1543	+ 10,2
729	+ 7,3

Tableau No 8

Disques à 1 mm., temp. : 17,9°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2748	+ 36,7
2198	+ 31,0
1465	+ 22,1
721	+ 13,1
2	+ 0,0
105	+ 4,3
405	+ 9,5
718	+ 13,5

Tableau No 9

Disques à 2 mm., temp. : 18,2°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2	0,0
102	+ 4,9
402	+ 12,2
715	+ 19,0
2741	+ 52,6
2203	+ 44,9
1464	+ 32,3
712	+ 18,3

Tableau No 10

Disques à 3 mm., temp. : 17,7°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2	+ 0,0
103	+ 5,6
399	+ 14,1
717	+ 23,3
2750	+ 58,0
2200	+ 51,0
1460	+ 38,3
716	+ 20,3

Tableau No 11

Disques à 4 mm., temp. : 17,9°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2	+ 0,0
104	+ 6,5
397	+ 17,7
722	+ 27,9
2750	+ 54,2
2200	+ 50,6
1489	+ 42,6
731	+ 26,9

Tableau No 12

Disques à 5 mm., temp. : 19,5°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2	+ 0,0
105	+ 7,9
404	+ 19,5
722	+ 29,3
2752	+ 49,8
2177	+ 46,5
1477	+ 40,0
720	+ 29,0

Tableau No 13

Disques à 6 mm., temp. 20,5°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
1,5	+ 0,0
102	+ 8,3
408	+ 22,3
722	+ 29,5
2757	+ 46,5
2191	+ 42,5
1485	+ 37,8
722	+ 28,8

Tableau No 14

Disques à 8 mm., temp. : 20,3°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2	+ 0,0
103	+ 9,7
403	+ 22,2
726	+ 27,4
2766	+ 46,4
2189	+ 39,9
1481	+ 33,6
725	+ 25,9
2746	+ 45,5

Tableau No 15

Disques à 10 mm., temp. : 20,6°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
3	+ 0,0
104	+ 9,8
400	+ 20,1
725	+ 24,5
2761	+ 46,5
2188	+ 41,1
1487	+ 32,7
724	+ 24,1

Disque en avional B

Tableau No 16

T = 2 sec.

Air

Temp. : 20,30

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2127	46,1	+ 13,0	0,001219
2761	52,5	+ 15,0	0,001355
725	27,0	+ 7,8	0,000859
0,3	0,6	0,0	0,000375
temp. : 22,4°			
2755	52,5	+ 14,2	0,001309
1615	40,2	+ 10,8	0,001070
730	27,0	+ 7,4	0,000834
252	15,9	+ 3,9	0,000627
10	3,2	+ 0,9	0,000408

Tableau No 17

T = 8 sec.

Air

Temp. : 19,80

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2771	52,6	+ 29,0	0,00243
1725	41,5	+ 22,6	0,00205
726	27,0	+ 13,4	0,00153
3	1,7	0,0	0,000564
temp. : 20,5°			
2758	52,5	+ 29,4	0,00245
1638	40,5	+ 22,7	0,00200
728	27,0	+ 15,2	0,00151
250	15,8	+ 8,9	0,00110
11	3,3	+ 1,2	0,00078

Tableau No 18

T = 8 sec.

CO₂

Temp. : 20,50

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2755	52,5	+ 33,3	0,00259
1623	40,3	+ 24,8	0,00209
725	27,1	+ 17,1	0,00156
256	16,0	+ 10,3	0,00110
5	2,2	- 0,7	0,000640

Tableau No 19

T = 8 sec.

Argon

Temp. : 21,30

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2725	52,2	+ 37,5	0,00305
1634	40,4	+ 28,9	0,00251
730	27,0	+ 18,9	0,00187
252	15,9	+ 11,1	0,00134
5	2,2	- 0,3	0,00086

Tableau No 20

T = 8 sec.

Hydrogène

Temp. : 20,80

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2748	52,4	+ 5,9	0,000708
1643	40,5	+ 4,5	0,000634
745	27,3	+ 2,9	0,000541
244	15,6	+ 1,5	0,000490
11	3,3	+ 1,0	0,000587

Disque en laiton C

T = 2 sec.

Air

Temp. : 20,7°

Tableau No 21

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
4,8	2,2	+ 0,0	0,000328
20,0	4,5	+ 0,4	0,000332
46,0	6,8	+ 0,7	0,000347
89,0	9,4	+ 1,0	0,000365
180	13,4	+ 1,3	0,000393
357	18,9	+ 1,9	0,000531
727	27,0	+ 2,9	0,000496
1500	38,7	+ 4,6	0,000593
2211	47,0	+ 3,8	0,000654
2768	52,6	+ 4,9	0,000694
0,09	0,3	- 0,8	0,000293

Disque en verre organique D

T = 2 sec.

Air

Temp. : 20,5°

Tableau No 22

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
725	26,9	+ 16,0	0,00145
2765	52,6	+ 30,0	0,00241
2148	46,3	+ 26,7	0,00221
1401	37,4	+ 21,5	0,00186
10	3,2	- 0,2	0,00059
223	14,9	+ 8,8	0,00098
725	26,9	+ 16,0	0,00144

Equipage à palettes

Tableau No 23

Palettes horizontales

T = 2 sec.

Air

Temp. : 20,6°

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
11,5	3,4	+ 0,6	0,000347
249	15,8	+ 3,1	0,000480
715	26,7	+ 4,7	0,000600
1594	39,9	+ 7,6	0,000758
2755	52,5	+ 10,2	0,000880

Tableau No 24

Palettes verticales

T = 2 sec.

Air

Temp. : 19,4°

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
8,2	2,9	+ 0,6	0,000345
249	15,8	+ 4,2	0,000500
708	26,6	+ 7,8	0,000638
1584	39,8	+ 13,4	0,000816
2748	52,4	+ 19,5	0,000986

B. Milieu limité

Disque en avional B

Tableau No 25

T = 2 sec.

Air

Temp. : 21,2°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2768	+ 11,5	0,001295
2022	+ 8,6	0,001233
1422	+ 5,9	0,001195
732	+ 3,2	0,001170
9	- 0,2	0,001150

Tableau No 26

Gaz carbonique

Temp. : 21,8°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2767	+ 15,6	0,001330
2032	+ 12,0	0,001174
1434	+ 9,0	0,001094
733	+ 4,7	0,001005
8,5	0,0	0,000945

Tableau No 27

Argon
Temp. : 21,5°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2727	+ 15,9	0,00155
2017	+ 11,9	0,00146
1411	+ 8,0	0,00141
733	+ 4,2	0,00136
9,5	0,0	0,00131

Tableau No 28

Hydrogène
Temp. : 21,9°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2500	+ 0,1	0,000694
1234	+ 0,1	0,000689
196	0,0	0,000691
10	0,0	0,000786

Tableau No 29

Disque en avionaj B

T = 8 sec.
Air
Temp. : 21,7°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2732	+ 12,6	0,00426
2012	+ 9,3	0,00423
1390	+ 6,3	0,00421
722	+ 3,7	0,00418
11,2	+ 0,1	0,00402

Tableau No 30

Equipage à palettes verticales

T = 2 sec.
Air
Temp. : 20,2°

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
12,5	3,5	+ 2,1	0,000682
712	26,7	+ 14,6	0,000828
1373	37,0	+ 21,9	0,000985
1977	44,5	+ 26,3	0,001150
2752	52,5	+ 31,1	0,001220

DEUXIÈME SÉRIE DE MESURES

Pendule entretenu, grandes amplitudes

A. Milieu illimité

Disque en avionaj B

Tableau No 31

T = 2 sec.
Air
Temp. : 21,5°

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2765	52,6	+ 13,9	0,00304
1641	40,5	+ 10,9	0,00260
725	26,9	+ 7,4	0,00220
253	15,9	+ 4,6	0,00190
10	3,2	- 0,2	0,00161
725	26,9	+ 7,1	
2765	52,6	+ 13,0	

Tableau No 32

Argon
Temp. : 22,7°

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2764	52,6	+ 16,0	0,00344
1620	40,2	+ 11,3	0,00289
724	26,9	+ 7,9	0,00238
246	15,7	+ 4,9	0,00197
9	3,0	- 0,2	0,00163
2744	52,4	+ 15,8	

Equipage à palettes

Tableau No 33

palettes horizontales

Tableau No 34

palettes verticales

T = 2 sec.

Air

Temp. : 21,2°

T = 2sec.

Air

Temp. : 22,4°

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2762	52,6	+ 7,2	0,00278
1686	41,1	+ 5,1	0,00236
722	26,9	+ 3,5	0,00192
258	16,1	+ 0,5	0,00166
10	3,2	0,0	0,00146
temp. : 22,3°			
2767	52,6	+ 8,4	
1946	44,1	+ 6,8	
727	27,0	+ 3,6	
250	15,8	+ 1,7	
10	3,2	0,0	

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2754	52,6	+ 14,5	0,00876
2007	44,9	+ 11,6	0,00676
714	26,9	+ 4,1	0,00338
260	16,1	+ 1,1	0,00212
13	3,6	0,0	0,00150
temp. : 22,3°			
2349	48,5	+ 14,6	
1760	42,0	+ 10,8	
727	27,0	+ 5,1	
200	14,1	+ 2,8	
11	3,3	0,0	

B. Milieu limité

Disque en avional B

Tableau No 35

T = 2 sec.

Air

Temp. : 21,4°

Tableau No 36

Argon

Temp. : 22,3°

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2771	+ 11,6	0,00276
2012	+ 8,6	0,00257
721	+ 3,0	0,00237
10	- 1,5	0,00228
1373	+ 5,2	0,00246
2761	+ 11,1	
11,5	- 1,8	

Pression mm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2770	+ 15,4	0,00314
2020	+ 11,5	0,00290
1439	+ 8,4	0,00268
720	+ 4,3	0,00254
8	- 1,5	0,00250
2810	+ 15,2	

Tableau No 37

Equipage à palettes
verticales

T = 2 sec.

Air

Temp. : 22,3°

Pression mm.	$\sqrt{P}$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$	δ
2517	50,2	+ 55,6	0,00420
1752	41,6	+ 39,4	0,00342
722	26,9	+ 19,4	0,00243
240	15,5	+ 5,8	0,00198
11	3,3	+ 1,1	0,00177

DISCUSSION DES RÉSULTATS

Introduction

Pour rendre plus facile l'interprétation des résultats, ceux-ci sont reportés sur des graphiques qui font mieux ressortir que les tableaux l'allure des fonctions.

Dans le but de simplifier l'écriture et s'il n'est pas autrement précisé :

Petite amplitudes, signifie toujours que les oscillations du pendule ont une amplitude de l'ordre de 1° , le pendule oscille librement.

Grandes amplitudes, signifie que les oscillations du pendule ont une amplitude de 270° , le mouvement est alors entretenu.

* * *

Approximation des mesures : Pour les petites amplitudes, la précision des mesures dans la détermination de la période atteint le cent-millième. Une variation de période de dix cent-millièmes

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5 = 10 \right)$$

n'est donc pas connue avec une précision supérieure à $10 \text{ } \frac{1}{10^5}$.

¹ En fait, l'examen des résultats fait ressortir que dans la plupart des cas la précision a été très supérieure.

Pour les grandes amplitudes, la précision des mesures est en général un peu moins bonne, l'entretien n'étant pas sans action sur la régularité du mouvement du pendule.

L'action du fluide entraîné sur la période étant toujours très faible avec un équipage formé d'un disque unique (maximum 15 cent-millièmes dans l'air à la pression ordinaire et avec l'équipage en verre organique), nous avons réalisé tout d'abord de nombreuses expériences avec un équipage formé d'une pile de disques, de façon à augmenter cette influence. Les résultats obtenus ont montré la complexité du problème dans ce cas par suite de l'influence réciproque des disques. Cette méthode a dû être abandonnée malgré l'attrait qu'elle présentait; nous en donnerons cependant dans le paragraphe suivant les résultats essentiels concernant trois séries de mesures.

Equipage formé d'une pile de disques

Tableaux Nos 7-15

Petites amplitudes : Les mesures ont été faites dans l'air jusqu'à 4 atmosphères avec une pile de 6 disques dont la distance variait de 0 mm. (correspondant à un disque unique) à 10 mm. La fig. 22 rend compte des résultats.

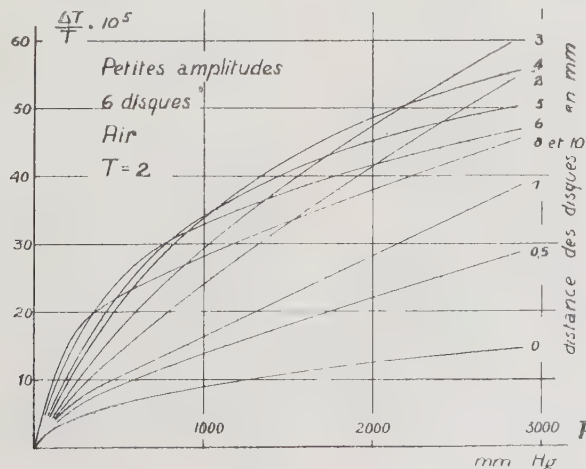


Fig. 22

Pour un écartement donné des disques, l'effet du fluide entraîné sur la période augmente avec la pression.

Par contre, si aux faibles pressions l'effet augmente avec l'écartement des disques, il n'en est plus de même aux pressions plus élevées ce que fait bien ressortir la fig. 23. En abscisse est porté l'écartement des disques, en ordonnée les variations de période sous quelques pressions (valeurs interpolées sur les courbes de la fig. 22). A chaque pression correspond un maximum d'effet pour un écartement déterminé des disques. Ce maximum se déplace vers les petites distances des disques au fur et à mesure que la pression augmente, il est aussi plus accusé.

lant dans l'eau (page 14) appelle quelques remarques. L'existence d'un maximum pourrait être le fait de la force centrifuge dont l'effet, négligeable pour une distance inférieure à 2 mm., va rapidement croissant avec l'écartement des disques. Mais l'influence de la force centrifuge diminue aussi avec l'amplitude (page 16) et son action n'est plus guère sensible aux petites amplitudes. Dans ce cas, il devrait y avoir un déplacement du maximum avec l'amplitude, ce que nous n'avons pas observé.

Il est certain, d'autre part, que le déphasage entre le mouvement du fluide et celui des disques doit jouer un rôle ; à ce propos Brillouin [(45), Livre III, p. 14], suggère l'hypothèse suivante :

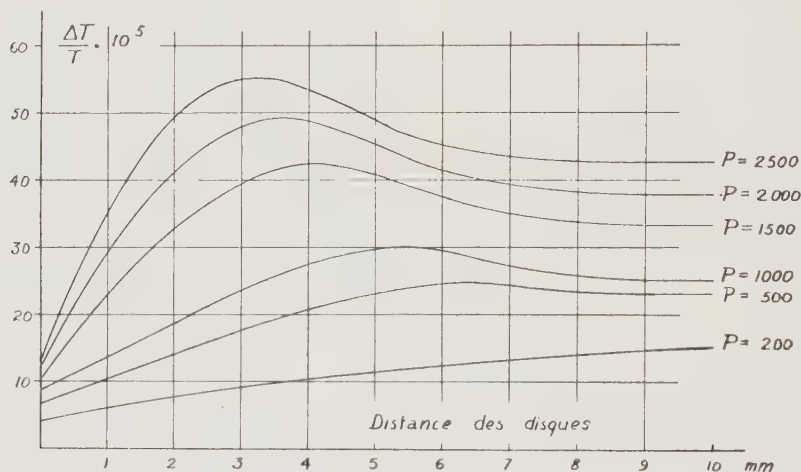


Fig. 23

Petites amplitudes
Air

Pile de 6 disques
T = 2 sec.

Grandes amplitudes : L'amplitude est exceptionnellement égale à 360° ; l'équipage est formé d'une pile de 9 disques. Les résultats sont qualitativement tout à fait semblables, les fig. 24 et 25 donnent les résultats obtenus dans l'air et le gaz carbonique.

Dans l'air, l'influence maximum aux pressions élevées correspond à une distance des disques voisine de 3,3 mm. Sa position est pratiquement indépendante de l'amplitude. Dans le gaz carbonique le maximum a lieu dans les mêmes conditions de pression pour une distance des disques de 2,6 mm.

Ces résultats mettent en évidence la complexité des phénomènes dès que les disques se trouvent à faible distance les uns des autres. Il existe alors une action mutuelle des disques qui ne travaillent d'une façon indépendante qu'à partir d'une distance de 8 à 10 mm.

L'observation du mouvement du fluide entre les disques, telle qu'elle a été faite pour l'équipage oscil-

lante dans l'eau (page 14) appelle quelques remarques. L'existence d'un maximum pourrait être le fait de la force centrifuge dont l'effet, négligeable pour une distance inférieure à 2 mm., va rapidement croissant avec l'écartement des disques. Mais l'influence de la force centrifuge diminue aussi avec l'amplitude (page 16) et son action n'est plus guère sensible aux petites amplitudes. Dans ce cas, il devrait y avoir un déplacement du maximum avec l'amplitude, ce que nous n'avons pas observé.

Il est certain, d'autre part, que le déphasage entre le mouvement du fluide et celui des disques doit jouer un rôle ; à ce propos Brillouin [(45), Livre III, p. 14], suggère l'hypothèse suivante :

Une partie de l'air est entraînée entre les disques ; cette quantité d'air augmente avec la distance des disques, d'où un effet croissant sur la période ; mais en outre il y a un facteur périodique en fonction de la distance des disques, dont la longueur d'onde (voir plus loin, page 30) est inversement proportionnelle à la racine de la densité. Lorsque les disques sont suffisamment rapprochés, un disque est dans le même domaine de phase que l'air entraîné par l'autre, la réaction d'un disque sur l'autre est retardatrice pour la période. lorsque la distance des disques est supérieure à une demi-longueur d'onde, un disque est dans le domaine de phase opposé de l'air entraîné par l'autre ; la réaction d'un disque sur l'autre peut devenir accélératrice, il y a une diminution d'effet sur la période¹.

¹ Toujours d'après Brillouin, ce phénomène aurait été à l'origine des anomalies constatées par Meyer sur la viscosité de l'air déterminée par la méthode des disques oscillants.

L'effet retardateur maximum doit se situer pour une distance des disques inférieure à une demi-longueur d'onde ; il doit en outre être indépendant de l'amplitude.

Pour une période d'oscillation de 2 sec., les demi-longueurs d'onde sont respectivement :

Dans l'air : pression 720 mm. Hg = 9,7 mm.

» 2500 » = 5,3 »

Dans le CO₂ : » 2400 » = 4,0 »

Cette hypothèse est, qualitativement au moins, en accord avec les résultats obtenus concernant la position du maximum et son déplacement vers les petites distances des disques au fur et à mesure que la pression augmente. Dans le gaz carbonique, le maximum se situe pour une distance des disques plus petite que dans l'air.

Nous n'avons pas cherché à pousser plus loin les essais avec l'équipage formé d'une pile de disques, l'étude systématique de ce problème, quel qu'en fût l'intérêt, sortant du cadre de ces recherches.

Grandes amplitudes

Pile de 9 disques

Air

T = 2 sec.

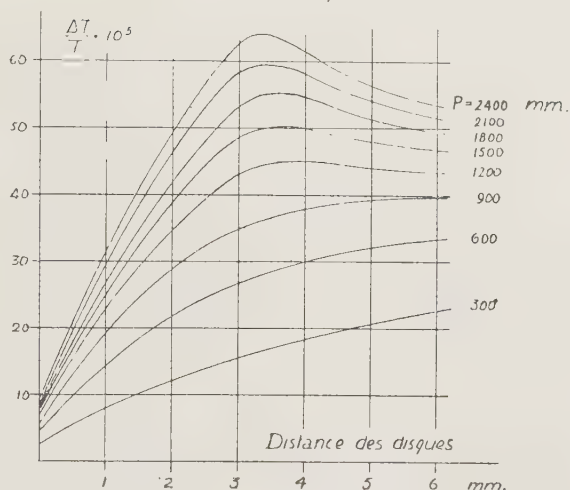


Fig. 24

Equipe formé d'un disque unique

Milieu illimité ; petites amplitudes

Influence du gaz entraîné sur la période

Tableaux Nos 16-22.

L'étude mathématique indique que l'effet sur la période est proportionnel à $\sqrt{\rho \eta}$, c'est-à-dire à $\sqrt{P \eta}$ P étant la pression. Les essais ont été effectués avec le disque en avional B et pour une période de 8 sec. de façon à augmenter la sensibilité.

Dans les limites de pressions réalisées, le coefficient de viscosité peut être considéré comme constant, l'effet sur la période sera donc sensiblement proportionnel à $\sqrt{P}$. La fig. 26 montre qu'il en est bien ainsi.

Rapportées aux constantes des gaz utilisés et par rapport à l'air, les valeurs trouvées expérimentalement permettent de dresser le tableau suivant :

Tableau No 38

Gaz	$\sqrt{\rho \eta}$ (calc.) rap. à l'air	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$ (exp.)	$\frac{\Delta T}{T}$ (exp.) rap. à l'air
Air	1	28,0	1
CO ₂	1,12	31,8	1,13
Argon	1,28	35,2	1,26
Hydrogène	0,18	5,2	0,19

L'accord avec la théorie est très bon.

Grandes amplitudes

Pile de 9 disques

CO₂

T = 2 sec.

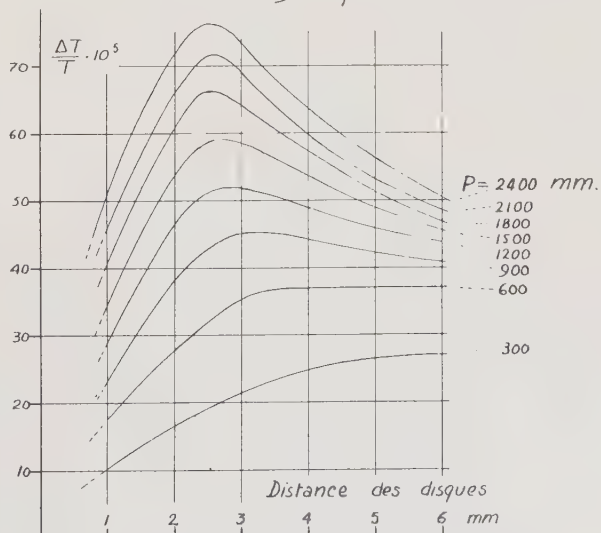
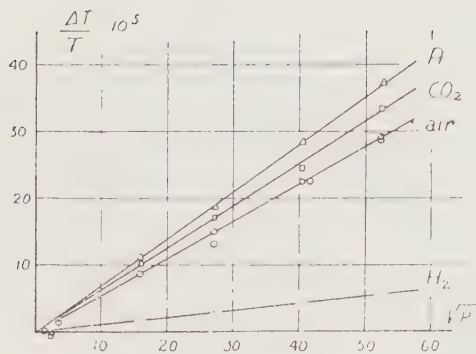
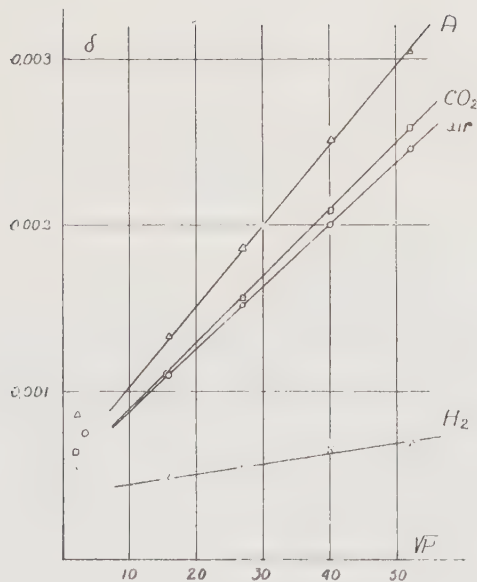


Fig. 25



Petites amplitudes — Milieu illimité
Disque avional B $T = \pi \text{ sec.}$

Fig. 26



Petites amplitudes
Milieu illimité
Disque avional B
 $T = 8 \text{ sec.}$

Fig. 27

En valeur absolue, le calcul donne par exemple dans l'air sous 760 mm. de Hg : formule V, page 5.

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{R^3}{2I} \left(\frac{R}{2} + L \right) \sqrt{\pi \rho \eta T}$$

$$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5 = 15,8$$

La valeur expérimentale relevée sur la droite de sentiment donne :

$$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5 = 15,3$$

en bon accord avec le calcul.

Décroissement. La théorie mathématique, développée dans le traité de Bouasse [(46), page 250], montre que le décroissement est aussi proportionnel à $\sqrt{\rho \eta}$. La fig. 27 indique qu'il en est bien ainsi avec les quatre gaz étudiés. Les droites représentatives s'étagent dans le même ordre que sur le graphique précédent.

Aux faibles pressions, la proportionnalité entre le décroissement et $\sqrt{P}$ ne semble plus réalisée ; il y a une amorce de palier à laquelle nous avons déjà fait allusion (page 18). Dans le cas de l'hydrogène, on observe une augmentation nette du décroissement qui s'explique probablement par de faibles rentrées d'air dues à un défaut d'étanchéité de l'appareil et modifiant sensiblement la viscosité du gaz dans l'enceinte.

Influence des dimensions de l'équipage

Tableaux Nos 16, 21, 22

Les mesures ont été faites dans l'air, elles sont reportées sur la figure 28, la période d'oscillation étant de 2 sec. Elles ont porté sur les 3 disques B, C et D. La période est proportionnelle à $\sqrt{P}$ dans les 3 cas. L'effet augmente avec le diamètre du disque et, le moment d'inertie étant constant, est proportionnel à :

$$R^3 \left(\frac{R}{2} + L \right)$$

Le tableau ci-dessous indique les valeurs calculées et trouvées expérimentalement, pour la pression de 2500 mm. de Hg, rapportées au disque B.

Tableau No 39

	rayon en cm.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$		
		calculé rap. à B	expériment.	expériment. rap. à B
Disque B	3,55	1	14,0	1
Disque C	2,70	0,38	4,7	0,34
Disque D	4,37	2,08	28,5	2,03

valeurs conformes à la théorie à l'approximation près des mesures.

Influence de la période d'oscillation

Tableaux Nos 16-17

Des mesures ont été faites dans l'air avec le disque en avional B et pour les deux périodes de 2 et 8 sec. La fig. 29 montre que l'influence est proportionnelle à $\sqrt{P}$.

La variation de période doit, de plus, être proportionnelle à $\sqrt{T}$; l'effet doit donc doubler en passant de la période 2 à celle de 8 sec. Pour la pression de 2500 mm. de Hg le tableau ci-dessous fait ressortir qu'il en est bien ainsi :

Tableau No 40

Période : sec.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2	14
8	28

Milieu illimité ; grandes amplitudes

Tableaux Nos 31-32

Il ne saurait être question de retrouver ici la concordance avec la théorie aussi nettement que lors des mesures effectuées aux petites amplitudes. La force centrifuge doit, aux grandes amplitudes, agir sur le mouvement du gaz entraîné par le disque en rotation rapide, et proportionnellement à la densité du gaz. Même si l'écoulement reste laminaire, l'influence sur la période doit vraisemblablement être diminuée.

Les mesures ont été effectuées avec le disque en avional B avec une période de 2 sec. dans l'air et dans l'argon (fig. 30).

L'effet du gaz entraîné sur la période est à peu près proportionnel à $\sqrt{P}$. Aux faibles pressions, cependant, l'effet semble diminuer assez rapidement. Il est possible que cela soit dû à l'influence des parois de l'enceinte et à la présence des bobines amortisseuses perturbant un peu le mouvement du fluide.

Les valeurs, mesurées sur les droites de sentiment, sont plus petites que celles obtenues aux faibles amplitudes ainsi que le fait ressortir le tableau suivant pour la pression de 760 mm. de Hg.

Tableau No 41 $\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$

	ampl. 1°		270°	rapport $\frac{\theta_0 = 270^\circ}{\theta_0 = 1^\circ}$
	8 sec.	2 sec.	2 sec.	
Air	15	7,5	7,0	0,93
Argon	19	9,5 (calc.)	8,2	0,87

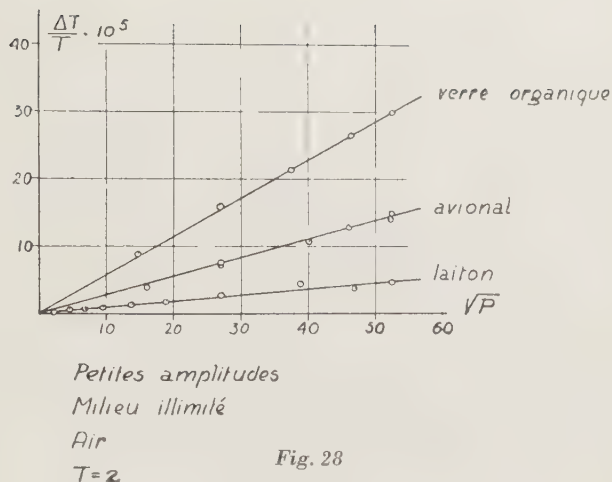


Fig. 28

La diminution de l'effet sur la période en fonction de l'amplitude ressort encore plus nettement du tableau suivant No 42 résumant les mesures effectuées avec un équipement en forme de cylindre creux en laiton de 47 mm. de hauteur, de 59 mm. de diamètre extérieur et de 56 mm. de diamètre intérieur¹.

Tableau No 42

Pression : 2500 mm. de Hg

Ampl.	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
360°	17,0
270	20,4
180	22,0
1	22,7

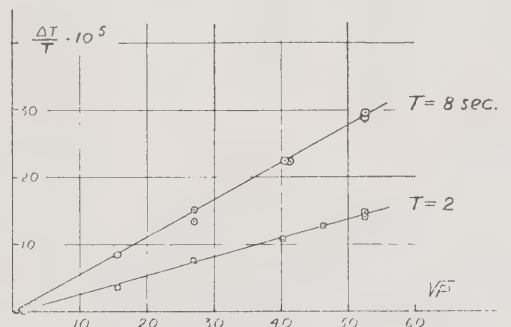
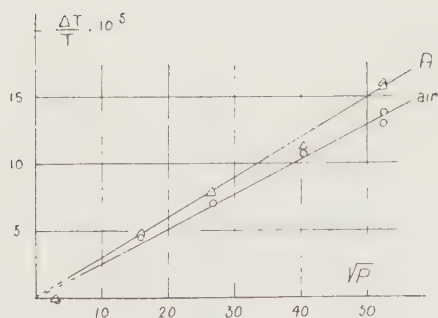


Fig. 29

¹ Les mesures effectuées avec cet équipement n'ont pas été poursuivies, la présence des trois bras reliant le cylindre à l'axe de rotation ne permettant pas un calcul précis du phénomène.



Grandes amplitudes
Milieu illimité
Disque avional B
 $T = 2 \text{ sec}$

Fig. 30

Equipeage formé d'un disque unique

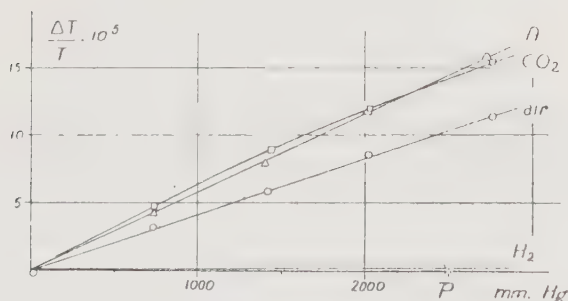
Milieu limité ; petites amplitudes

Les mesures ont été faites avec l'équipage formé du disque en avional B oscillant dans l'enceinte en verre organique. La distance entre les parois de l'enceinte et le disque mobile est de 2 mm.

Influence du gaz entraîné sur la période

Tableaux Nos 25-29

L'étude mathématique indique que l'influence sur la période est proportionnelle à la densité du gaz, c'est-à-dire à sa pression, mais indépendante de la viscosité. La fig. 31 montre bien que la variation de période est proportionnelle à la pression dans l'air, l'argon et l'hydrogène. Dans le gaz carbonique, l'allure de la fonction est plus compliquée. Jusqu'à 2000 mm. de Hg environ, l'influence de ce gaz est plus grande que celle de l'argon en raison de sa densité plus élevée. Au-dessus de 2000 mm. de Hg,



Petites amplitudes
Milieu limité
Disque avional B
 $T = 2 \text{ sec.}$

Fig. 31

l'influence du gaz carbonique est par contre inférieure à celle de l'argon.

Cette anomalie peut s'expliquer de la façon suivante : En milieu illimité, le gaz entraîné par le disque oscillant se meut suivant un mouvement sinusoïdal amorti dont la longueur d'onde se calcule à partir de :

$$\omega = \Omega_0 e^{-mz} \cos (nt - mz) \quad \text{Formule I, page 4.}$$

et vaut :

$$\lambda = \frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\pi \rho}{4T}}} \quad \lambda = \sqrt{\frac{4\pi \eta T}{\rho}}$$

λ pour les différents gaz utilisés sous la pression de 760 mm. de Hg est donné dans le tableau suivant :

Tableau No 43

	Air	CO ₂	Argon	H ₂
λ en mm.	19,4	14,2	18,3	51,4
rap. à l'air	1	0,73	0,95	2,7

Aux faibles pressions, λ étant relativement grand, tous les gaz se comportent vraiment comme dans un milieu limité ; la théorie est applicable et la période est proportionnelle à la pression. Au fur et à mesure que la pression croît, λ diminue et, à un moment donné, l'hypothèse d'une décroissance linéaire de la vitesse du gaz entre le plan mobile et le plan fixe cesse d'être applicable ; le gaz tend à se comporter de nouveau comme en un milieu illimité et la période est proportionnelle à $\sqrt{\rho \eta}$. Ceci se passe en tout premier lieu pour le gaz carbonique et l'étagement des courbes aux grandes pressions est celui déjà trouvé lors des mesures en milieu illimité où l'argon donne l'effet maximum.

L'anomalie est encore mieux marquée pour l'amortissement (fig. 32). En milieu limité, la théorie développée par Bouasse [(46), page 261], indique un amortissement proportionnel à la viscosité du gaz entraîné, indépendant par contre de la pression. Comparées à la fig. 27, les mesures en milieu limité font ressortir clairement la faible variation du décrément avec la pression surtout en ce qui concerne l'air, l'argon et l'hydrogène. L'augmentation du décrément dans l'hydrogène aux faibles pressions doit s'expliquer de nouveau par une faible rentrée d'air dans la cloche. Aux pressions moyennes, les courbes s'étagent suivant les viscosités croissantes. Aux pressions élevées, par contre (supérieures à 2000 mm. de Hg), le mouvement du pendule se rapproche de celui obtenu en milieu illimité (δ proportionnel à $\sqrt{\rho \eta}$). Ce changement se manifeste en premier lieu pour le gaz carbonique dont l'influence par rapport à l'air devient alors prépondérante. Le graphique de la fig. 32 est

très semblable à celui obtenu par A. Jaquerod [(15), page 105, fig. 2], concernant la variation de l'amplitude du balancier d'un chronomètre sous l'effet de la pression, dans l'air et dans le gaz carbonique. Aux faibles pressions, l'amplitude du balancier est plus grande dans le gaz carbonique que dans l'air en raison de la plus grande viscosité de ce dernier ; aux pressions plus élevées, c'est le contraire qui a lieu : l'influence du gaz carbonique l'emporte sur celle de l'air (apparition du terme en $\sqrt{\rho\eta}$).

Cette anomalie concernant l'influence du gaz carbonique sur la période et sur l'amortissement est une confirmation intéressante de la théorie.

Concernant l'influence relative des différents gaz sur la période, la comparaison entre les valeurs calculées et trouvées expérimentalement ne peut se faire qu'aux pressions moyennes où les fonctions sont encore linéaires pour tous les gaz. Le tableau suivant donne les résultats rapportés à l'air :

Tableau No 44

	$\rho_{20} \cdot 10^3$	$\frac{\Delta T}{T}$ rapporté à l'air	
		calculé	expériment.
Air	1,205	1	1
CO ₂	1,842	1,53	1,59
Argon	1,639	1,36	1,44
Hydrogène	0,084	0,07	0

Enfin la valeur absolue de l'influence du gaz entraîné sur la période est, dans l'air à la pression de 760 mm. de Hg :

valeur calculée : $\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5 = 3,4$

valeur expérimentale : $= 3,1$

Influence de la période d'oscillation

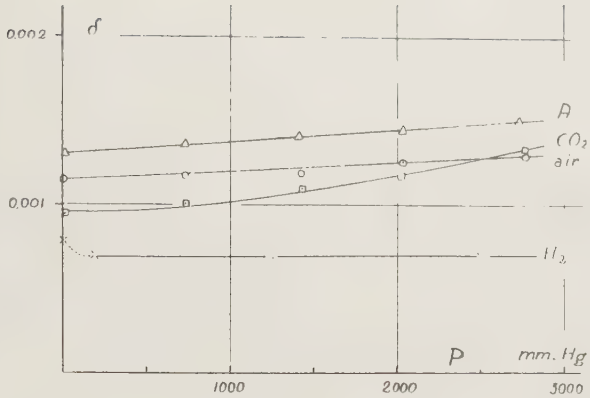
Tableaux Nos 25 et 29

La théorie indique un effet du gaz entraîné sur la période, indépendant de la période. Les mesures faites dans l'air avec des périodes d'oscillation de 2 sec. et de 8 sec. reportées dans les tableaux Nos 25 et 29 montrent qu'il en est effectivement ainsi.

Milieu limité ; grandes amplitudes

Tableaux Nos 35-36

L'influence sur la période (fig. 33) est proportionnelle à P à partir des pressions moyennes. Pour la pression de 10 mm., les deux points expérimentaux dans l'air et dans l'argon se placent nettement au-dessous des droites tracées de sentiment. Cette anomalie n'a pas été retrouvée lors des essais effectués avec un chronomètre (voir plus loin, page 37). Il est bon toutefois de rappeler que les mesures faites avec le pendule entretenu ne peuvent prétendre



Petites amplitudes
Disque avional B
Milieu limité
T = 2 sec

Fig. 32

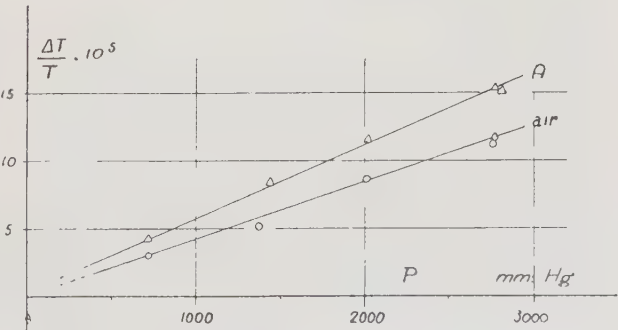
à la même précision que celles effectuées sur le pendule libre.

Les résultats à la pression de 760 mm. de Hg comparés aux valeurs trouvées pour les petites amplitudes sont donnés dans le tableau suivant, relevés sur les droites de sentiment :

Tableau No 45 $\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$

Amplitude	1°	270°
Air	3,0	3,2
Argon	4,4	4,4

La concordance avec les mesures faites sur le pendule libre est donc bonne.



Grandes amplitudes
Milieu limité
Disque avional B
T = 2 sec.

Fig. 33

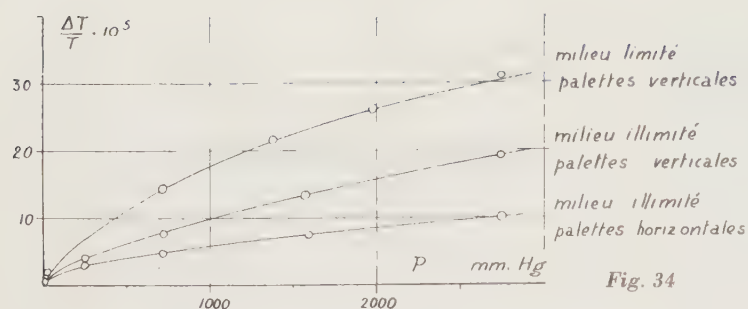


Fig. 34

Petites amplitudes
Disque à palettes
Air
 $T = 2 \text{ sec.}$

Grandes amplitudes
Disque à palettes
Air
 $T = 2 \text{ sec.}$

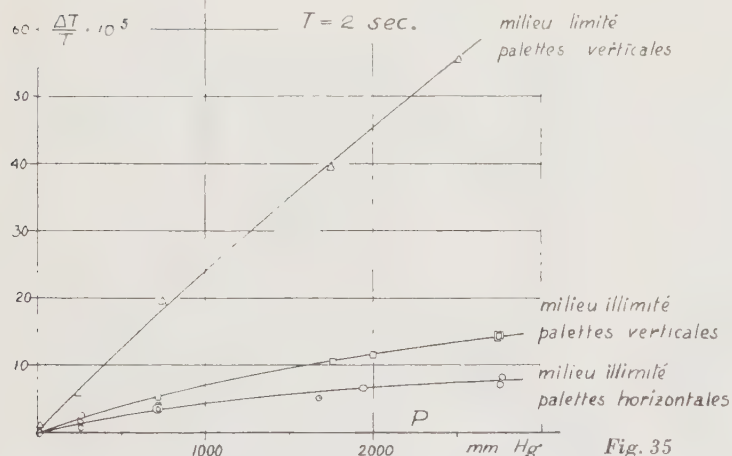


Fig. 35

Equipage à palettes Petites amplitudes

Tableaux Nos 23, 24 et 30

Les mesures ont été faites dans l'air uniquement (fig. 34).

En milieu illimité, l'influence de l'orientation des palettes se fait nettement sentir. L'effet est presque doublé quand le plan des palettes passe de la position horizontale à la position verticale.

En milieu limité, les palettes étant orientées dans des plans verticaux, l'effet sur la période est encore plus marqué, comme si le gaz entraîné entre les palettes faisait corps avec elles. L'effet n'est cependant pas proportionnel à P montrant que cet état n'est que partiellement réalisé, l'enceinte n'épousant pas exactement le profil de l'équipage.

Grandes amplitudes

Tableaux Nos 33, 34 et 37

La fig. 35 donne l'ensemble des résultats.

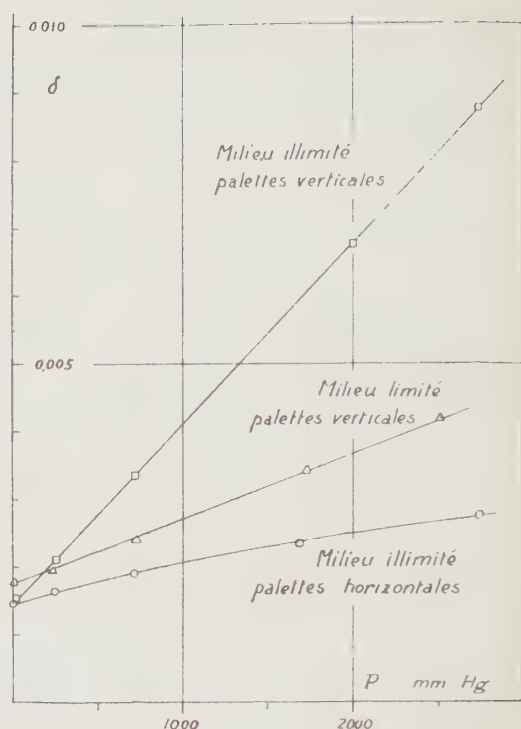


Fig. 36

Grandes amplitudes
Disque à palettes
Air
 $T = 2 \text{ sec.}$

En milieu illimité : les effets sur la période sont un peu inférieurs à ceux obtenus aux petites amplitudes.

En milieu limité, les palettes étant disposées verticalement, les effets sont par contre beaucoup plus considérables.

La comparaison avec l'effet sur l'amortissement, mesuré par le décrément, et donné par la fig. 36, est intéressante. Elle montre que l'effet sur la période ne varie pas du tout comme l'effet sur l'amortissement.

L'amortissement est maximum en milieu illimité, les palettes étant disposées verticalement. Le mouvement du fluide n'est plus laminaire. L'effet sur la période est, dans ces conditions, relativement faible ; l'air étant chassé vers l'extérieur ne participe pas entièrement au mouvement. En milieu limité, les palettes étant toujours disposées verticalement, l'effet sur la période est maximum, la plus grande partie de l'air étant entraîné entre les palettes ; l'amortissement est par contre beaucoup diminué par rapport à celui observé en milieu illimité (palettes verticales).

INFLUENCE DU MILIEU AMBIANT SUR LA MARCHÉ D'UN CHRONOMÈTRE

Introduction

L'influence du gaz entraîné sur la marche d'une montre, a été étudiée afin de déterminer dans quelle mesure la théorie précédente s'appliquait à la chronométrie.

Dans ce but, un chronomètre Nardin (No 10950), diamètre du mouvement 50 mm., échappement à ancre, a été transformé de la façon suivante :

L'arbre du balancier, qui pivote normalement entre deux ponts, a été prolongé en dehors du pont supérieur (coq) ce qui a permis d'ajuster facilement sur la partie en porte à faux des balanciers de formes variées.

Cette disposition entraînant des frottements supplémentaires, la marche du chronomètre s'en est trouvée quelque peu affectée. En particulier, ainsi qu'il ressort des mesures, l'isochronisme n'était pas très bien réalisé. Comme les variations de pression entraînent des variations d'amplitude, il a toujours été tenu compte dans le calcul des périodes du « défaut d'isochronisme » de façon à ne mesurer que l'effet direct du fluide sur la période.

Deux balanciers ont été utilisés :

Un disque d'aluminium, diamètre 13,44 mm., hauteur 3,36 mm., masse 1,282 g., moment d'inertie 0,284 g.cm² donnant la période de 0,4 sec. normale pour le chronomètre. Ce disque est une réduction à l'échelle de $\frac{1}{5}$ environ du disque en avional B utilisé précédemment avec le pendule de torsion.

Un balancier à vis monométallique en alliage de cuivre et béryllium, celui-là même qui équipe normalement le chronomètre, la période est de nouveau 0,4 sec. Ce balancier est formé essentiellement de deux bras supportant une jante (serge) circulaire portant 18 vis à sa périphérie. Les dimensions principales en sont :

diamètre intérieur de la serge	16,00 mm.
diamètre extérieur de la serge	17,16 mm.
diamètre total (sur les vis)	18,78 mm.
épaisseur de la serge	1,15 mm.

épaisseur du bras	0,40 mm.
largeur du bras	1 à 1,50 mm.
diamètre des vis	1,05 mm.

Son moment d'inertie est très voisin de celui du disque en aluminium, soit environ 0,284 g.cm².

Les mesures ont été effectuées dans différents gaz, en milieu illimité et limité, la distance entre les parois intérieures de l'enceinte et la périphérie du balancier étant égale alors à 0,5 mm.

Remarquons à ce propos qu'en milieu illimité la face inférieure du balancier n'était séparée de la surface du pont que par une distance de deux à trois millimètres ; en milieu limité, la face inférieure du disque ne se trouvait que partiellement dans les conditions requises.

La compensation thermique était assurée par un spiral en métal-invar. Ce spiral se trouvait dans le même gaz que le balancier et était donc soumis aux variations de pression. Un dispositif permettant de séparer l'influence du gaz mis en mouvement par le spiral et le balancier est difficile à concevoir¹. L'effet a donc été étudié en bloc ; d'ailleurs les résultats obtenus, sensiblement conformes à ceux prévus par la théorie, laissent à penser que l'influence du spiral doit être faible.

La marche du chronomètre a été mesurée au moyen de la machine Gibbs (voir note précédente page 11). La précision du cent-millième est ainsi obtenue en quelques minutes, ce qui est un avantage.

En chronométrie, la variation de période est toujours exprimée par la **marche** qui est l'écart en secondes par jour rapporté aux indications d'une horloge donnant le temps moyen. Une seconde par jour correspond à une variation de période de 1,157 cent-millième. Les résultats exprimés en secondes par jour et en cent-millièmes ne diffèrent donc que de 16 %.

Un retard de la montre signifie une augmentation de la période.

¹ Un essai dans ce sens a été tenté par Arcay [10], mais ses résultats demanderaient à être précisés.

Etude de l'isochronisme

La marche est mesurée pour différentes amplitudes obtenues en armant progressivement le ressort-moteur :

Tableau No 46

Amplitude	Amplitude moyenne	Marche
186° à 188°	187°	R 25
200 à 206	203	R 22
208 à 210	209	R 20
215 à 218	217	R 18
224 à 226	225	R 15
238 à 240	239	R 15
246 à 248	247	R 11
230	230	R 16
210	210	R 18
230 à 234	232	R 15
238 à 240	239	R 13

La variation est à peu près linéaire, le défaut d'isochronisme est de 0,24 sec. d'avance pour une augmentation d'amplitude de 1° soit une variation de période de $-0,28.10^{-5}$.

Coefficient thermique

Les mesures ont porté chaque fois sur des périodes de 4 à 5 jours, la marche étant déterminée toutes les 24 heures par rapport à une horloge de précision.

Tableau No 47

Températ.	Marche
20,2°	A 8,0
29,5	A 9,6
39,5	A 11,0
16,4	A 7,0
41,2	A 12,8

Le coefficient thermique correspond donc à une avance d'environ 0,2 sec. par degré, il est suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas lieu d'en tenir compte, la température se maintenant constante à la précision de 1° au cours d'un essai.

Résultats expérimentaux

Dans ce qui suit :

m signifie la marche brute relevée,

m^* signifie la marche compte tenu du défaut d'isochronisme,

m_0 signifie la marche réduite en supposant l'écart nul dans le vide.

Milieu illimité

Balancier en aluminium

Tableau No 48

Air

Pression mm.	$\sqrt{P}$	ampl.	m	m^*	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2774	52,7	211°	R 37,5	R 37,5	R 23,0	- 26,5
1595	39,9	213	R 31,5	R 32,0	R 17,5	+ 20
714	26,7	218	R 24,0	R 26,0	R 11,5	- 13
272	16,5	222	R 18,5	R 21,5	R 7,0	- 8
9	3	235	R 11,0	R 17,0	R 2,5	+ 3
726	26,9	223	R 26,0	R 29,0	R 10,5	- 12
1524	39,0	218	R 33,0	R 35,0	R 16,5	+ 19
2205	47,0	212	R 39,0	R 39,5	R 21,0	+ 24
2938	54,2	210	R 42,0	R 42,0	R 23,5	+ 27
726	26,9	223	R 27,0	R 30,0	R 11,5	- 13
20	4,5	228	R 16,0	R 20,5	R 2,0	+ 2
726	26,9	221	R 29,0	R 32,0	R 13,5	+ 16

Tableau No 49

Argon

Pression mm.	$\sqrt{P}$	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2775	52,7	204°	R 30,5	+ 35
1735	41,6	210	R 24,5	+ 28,5
715	26,7	215	R 17	+ 20
250	15,8	220	R 10	+ 11,5
11	3,3	225	R 2	+ 2,5

Tableau No 50

Gaz carbonique

Pression mm.	$\sqrt{P}$	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2766	52,6	220°	R 26	+ 30
1600	40,0	222	R 19,5	+ 22,5
716	26,8	225	R 14	+ 16,5
235	15,3	230	R 8	+ 9
9	3	233	R 2	+ 2,5

Tableau No 51

Hydrogène

Pression mm.	$\sqrt{P}$	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2366	48,6	232 ⁰	R 4,5	+ 5
1487	38,6	232	R 3	+ 3,5
715	26,7	233	R 1,5	+ 2
253	15,9	235	R 1	+ 1
7	2,6	232	R 0	0

Milieu limité

Balancier en aluminium

Tableau No 52

Air

Pression mm.	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2774	208 ⁰	R 14	+ 16
2007	205	R 10,5	+ 12
1377	205	R 6,5	+ 7,5
714	208	R 5	+ 6
13	208	R 0	0
2723	207	R 15	+ 17,5
714	211	R 5	+ 6

Tableau No 53

Argon

Pression mm.	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2760	200 ⁰	R 20,5	+ 24
1996	199	R 14,5	+ 17
1404	200	R 11	+ 12,5
715	198	R 5,5	+ 6,5
6	201	R 0	0

Tableau No 54

Gaz carbonique

Pression mm.	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2756	228 ⁰	R 21	+ 24
1976	226	R 17	+ 20
1343	226	R 12	+ 14
716	227	R 6	+ 7
10	227	R 0	0
2783	216	R 22	+ 25,5
1983	215	R 18	+ 21
1370	215	R 12	+ 14
713	216	R 6	+ 7
10	220	R 0	0

Tableau No 55

Hydrogène

Pression mm.	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2225	219 ⁰	R 2,5	+ 3
1045	219	R 1,5	+ 2
6	220	R 0	0

Milieu illimité

Balancier à vis

Tableau No 56

Air

Pression mm.	$\sqrt{P}$	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2741	52,4	201 ⁰	R 40	+ 46,5
1614	40,2	215	R 30	+ 35
711	26,7	224	R 19	+ 22
244	15,6	237	R 11,5	+ 13,5
8	2,8	245	R 2	+ 2,5

Tableau No 57

Argon

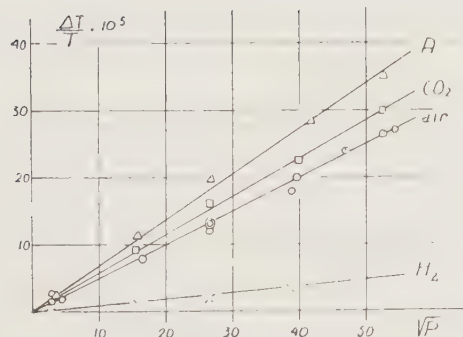
Pression mm.	$\sqrt{P}$	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2734	52,3	195 ⁰	R 54,5	+ 63
1721	41,5	215	R 40,5	+ 47
714	26,7	227	R 25	+ 29
254	15,9	243	R 17,5	+ 20,5
6	2,4	250	R 2,5	+ 3

Tableau No 58

Hydrogène

Pression mm.	$\sqrt{P}$	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2111	46,0	258 ⁰	R 5,5	+ 6
714	26,7	258	R 3,5	+ 4
4	2	260	R 0	0

Chronomètre



Milieu illimité

Balancier plein - avional

Fig. 37

Milieu limité

Balancier à vis

Tableau No 61

Hydrogène

Pression mm.	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2169	234 ⁰	R 1,5	+ 1,5
1000	235	R 0,5	+ 0,5
9	234	R 0	0

Discussion des résultats

Balancier formé d'un disque en aluminium

Milieu illimité

Tableaux Nos 48-51

Les mesures ont été faites dans l'air, le gaz carbonique, l'argon et l'hydrogène, fig. 37. L'influence est proportionnelle à $\sqrt{\rho\eta}$ ainsi que le prévoit la théorie.

Sous la pression de 760 mm. de Hg, tableau No 62, les effets sont, comparativement à ceux calculés, rapportés à l'air :

Tableau No 62

	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$		
	Calculé rapporté à l'air	Expériment.	Expériment. rapporté à l'air
Air	1	13,9	1
CO ₂	1,11	15,7	1,13
Argon	1,28	18,6	1,34
Hydrogène	0,18	2,5	0,20

soit sensiblement les rapports prévus.

En valeur absolue dans l'air à la pression de 760 mm. de Hg :

$$\text{Valeur calculée : } \frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5 = 18,6$$

$$\text{Valeur mesurée : } = 13,9$$

L'influence observée plus faible que celle prévue peut être le fait, d'une part, de la vitesse élevée du balancier (amplitude 220⁰) comme cela a déjà été relevé lors des mesures avec le pendule de torsion (page 29), d'autre part, du fait que le balancier ne se trouvait que partiellement en milieu illimité.

Milieu limité

Tableaux No 52-55

L'influence de l'air, de l'argon et de l'hydrogène sur la période est, ainsi qu'il faut s'y attendre, pro-

Tableau No 59

Air

Pression mm.	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
722	201 ⁰	R 13	+ 15
2782	188	R 43	+ 50
2009	195	R 30	+ 35
1448	200	R 21	+ 24,5
722	200	R 11	+ 13
277	205	R 3,5	+ 4
10	217	R 4	+ 4,5
722	205	R 11	+ 13
270	207	R 4,5	+ 5
10	211	R 0,5	+ 0,6
722	206	R 12	+ 14

Tableau No 60

Argon

Pression mm.	Ampl.	m_0	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$
2782	181 ⁰	R 53	+ 61
2007	196	R 42	+ 49
1372	198	R 28,5	+ 33
722	199	R 15,5	+ 18
270	205	R 5,5	+ 6,5
11	208	A 1	- 1

proportionnelle à la pression, fig. 38. Avec le gaz carbonique on retrouve l'anomalie observée dans les mêmes conditions avec le pendule de torsion (page 30).

En valeur relative, la concordance entre les effets calculés et trouvés expérimentalement, rapportés à l'air, ressort du tableau suivant, No 63 :

Tableau No 63

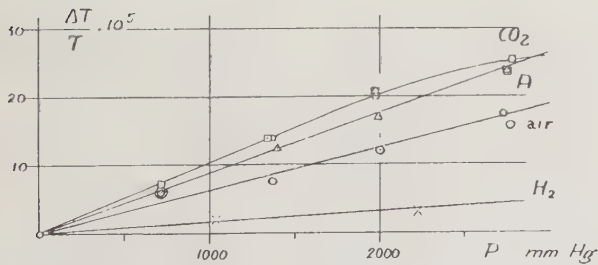
Pression 760 mm. de Hg

	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5$		
	Calculé rapporté à l'air	Expériment.	Expériment. rapporté à l'air
Air	1	4,8	1
CO ₂	1,53	7,9	1,64
Argon	1,36	6,7	1,40
Hydrogène	0,07	1,1	0,23

En valeur absolue, dans l'air à la pression de 760 mm. de Hg :

Valeur calculée : $\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5 = 3,8$

Valeur mesurée : $= 4,8$



Chronomètre

Fig. 38

Milieu limité
Balancier plein - avional

soit une valeur observée un peu supérieure à celle prévue. Rappelons à ce propos que la face inférieure du disque ne se trouvait que partiellement en milieu limité ; l'influence notablement plus forte en milieu illimité peut expliquer cette différence.

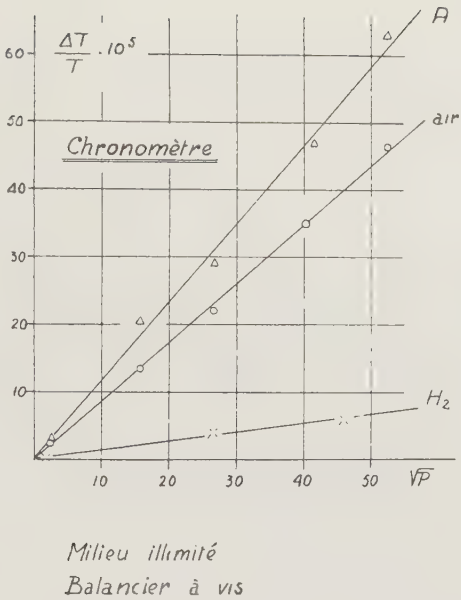


Fig. 39

Balancier à vis
Tableaux Nos 56-61

En milieu illimité, fig. 39, l'influence du fluide entraîné sur la période est sensiblement proportionnelle à $\sqrt{P \eta}$.

En milieu limité, fig. 40, l'influence est sensiblement proportionnelle à P.

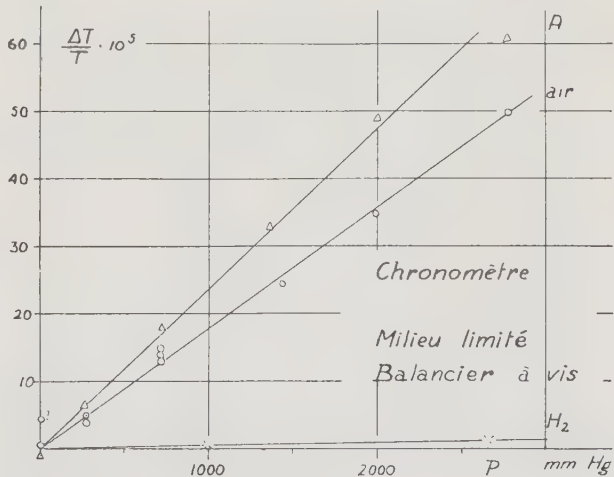


Fig. 40

CONCLUSIONS

L'influence du fluide entraîné sur la période d'oscillation d'un pendule de torsion et du balancier d'un chronomètre a été étudiée pour l'air, le gaz carbonique, l'argon et l'hydrogène, avec des équipages de formes variées et pour différentes périodes d'oscillation.

Avec le pendule de torsion oscillant librement et pour de petites amplitudes, les résultats des expériences faites sous différentes pressions correspondent bien à ce que laisse prévoir l'analyse mathématique du phénomène.

En particulier pour un pendule donné, dont l'équipage est formé d'un disque plein sans aspérités, en milieu illimité l'influence du gaz entraîné sur la période est proportionnelle à $\sqrt{\rho\eta}$, c'est-à-dire que, dans les conditions ordinaires de la pression, l'influence sur la période est proportionnelle à $\sqrt{P}$.

En milieu limité, l'influence est par contre proportionnelle à P .

Pour de grandes amplitudes, le mouvement du pendule étant alors entretenu, les résultats des mesures sont encore en bon accord, qualitativement du moins, avec la théorie. L'influence est cependant un peu plus faible en milieu illimité que pour les petites amplitudes, la différence étant d'environ 10 % entre 1° et 270° d'amplitude. Il y a donc un effet de l'amplitude qui devrait être précisé et que ne prévoit pas la théorie mathématique un peu sommaire faite au début de cette étude. Cet effet pourrait être attribué à la force centrifuge dont l'importance croît avec la vitesse angulaire de l'équipage mobile. Les observations faites, en faisant osciller le pendule dans un liquide, montrent bien l'influence croissante de la force centrifuge avec l'amplitude du mouvement.

Enfin, des expériences effectuées sur un chronomètre, il résulte que, dans ce cas encore, les résultats sont en bon accord avec ceux prévus. En particulier, et ceci explique les résultats plus ou moins capricieux obtenus par différents auteurs, l'influence du gaz entraîné sur la période est proportionnelle à $\sqrt{P}$ quand le balancier se meut dans un espace illimité; cette influence tend à devenir proportionnelle à P quand le balancier se meut dans une enceinte quasi fermée l'enveloppant à petite distance. En pratique, et si la pression est portée en abscisse, la courbe représentative de l'effet de la pression sur la période sera parabolique comprise entre une parabole du 2^e degré et une droite, tendant vers l'une ou l'autre de ces fonctions suivant le type de chronomètre utilisé.

La question n'est pas entièrement résolue de savoir si la période d'un balancier à vis est plus sen-

sible aux variations de pression que celle d'un balancier formé d'un disque plein sans aspérités. Les essais faits par différents auteurs n'ont rien donné de concluant [15, 21]. Il faut cependant remarquer que lors de ces essais, les formes et les dimensions des balanciers n'étaient jamais comparables. Au contraire, les recherches effectuées dans la présente étude, sur le pendule de torsion muni d'un disque à palettes orientables, ont mis en évidence un effet net de l'orientation des palettes.

Des mesures semblables seront entreprises sur un chronomètre équipé d'un balancier muni de palettes orientables. Elles permettront, espérons-le, de trancher définitivement la question.

A ce propos, il est bon d'insister sur une grosse difficulté rencontrée au cours de cette étude. Quelle que soit la forme utilisée pour l'équipage oscillant, l'effet du fluide entraîné sur la période est toujours très faible. Même avec la précision obtenue dépassant souvent le cent-millième, l'approximation des mesures reste de l'ordre de 5 %.

Ainsi que nous l'avons montré, une tentative d'augmenter l'influence du fluide en utilisant un équipage formé d'une pile de disques n'a pas donné de bons résultats, les phénomènes devenant tout de suite très compliqués. Dans ce sens des expériences utilisant la méthode de Maxwell [24], c'est-à-dire une pile de disques oscillant entre des plans fixes, donneraient peut-être des résultats plus intéressants.

Mais un autre moyen reste à disposition pour amplifier considérablement l'influence du fluide ambiant sur la période, c'est de faire osciller le pendule dans un liquide. Dans l'eau, par exemple, par rapport à l'air, à la température de 20°, l'influence serait environ 225 fois plus grande. La période d'oscillation devrait être choisie de façon à conserver au fluide un mouvement laminaire. Il est peu probable par contre que les mesures puissent se faire avec une grande amplitude des oscillations du pendule; l'amortissement devenant considérable, l'entretien du mouvement présenterait de grosses difficultés. Des mesures faites à différentes températures permettraient d'étudier l'action de la viscosité du liquide. L'influence de la densité ne pourrait se faire que par un choix judicieux des liquides utilisés.

Yee-Tak-Yu [44] a utilisé la méthode du pendule oscillant dans un liquide pour le calcul de la « masse virtuelle » et du « moment d'inertie virtuel » d'un corps immergé se déplaçant rapidement.

Enfin, il serait intéressant de trouver un moyen de réduire l'effet de la pression sur la marche des montres. Un dispositif supplémentaire comportant presque nécessairement un anéroïde comme appareil correcteur paraît bien compliqué. Un brevet comportant un tel dispositif a du reste été pris par Ditisheim [8] ; nous ignorons s'il a jamais été réalisé.

L'inspection des fig. 37 et 38, concernant le balancier formé d'un disque plein, suggère peut-être une solution. L'influence est en effet fortement atténuée quand le balancier oscille en milieu limité. A la pression de 760 mm. de Hg dans l'air, les résultats obtenus sont les suivants par rapport au vide :

$$\text{milieu illimité : } \frac{\Delta T}{T} \cdot 10^5 = 13,9$$

$$\text{milieu limité : } = 4,8$$

soit un effet trois fois moindre dans ce dernier cas. Cette dernière disposition a de plus l'avantage de rendre l'amplitude pratiquement indépendante de la pression ainsi qu'il ressort des différents tableaux, ce qui présente un intérêt au point de vue de l'isochronisme.

Pour le chronomètre utilisé dans cette étude, le coefficient barométrique, c'est-à-dire la variation de marche par mm. de Hg, à la pression ordinaire et en milieu limité a été trouvé égal à 0,005 sec.

Ce coefficient est très petit étant donné le diamètre du balancier de 13,4 mm. A. Jaquerod [(15) page 119] a trouvé pour différentes montres les valeurs suivantes :

Tableau No 64

Diamètre balancier mm.	Coeff. barométrique sec.
21,2	0,0083
19,3	0,0073
17,7	0,0090
15,2	0,0109
12,6	0,0187
8,7	0,0179

Soit à égalité de diamètre un coefficient barométrique deux à trois fois plus grand. Nul doute qu'en remplaçant le balancier en aluminium de la présente étude par un balancier en laiton de diamètre plus petit l'effet ne soit encore diminué.

Concernant la forme du balancier donnant un coefficient barométrique minimum dans une montre donnée, elle peut se déduire de l'expression de $\frac{\Delta T}{T}$ (formule No IX) en milieu limité. Il suffit de rendre minimum la fonction en considérant pour la montre étudiée le moment d'inertie du balancier comme constant. On aura :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\pi}{6} h \rho \frac{R^3}{I} (R + 2 L) = k \frac{R^3}{R^4 L} (R + 2 L)$$

$$\text{avec } R^4 L = \text{constante} = A$$

$$F = \frac{R^4}{A} + \frac{2}{R} \text{ minimum}$$

$$\frac{dF}{dR} = \frac{4 R^3}{A} - \frac{2}{R^2} = 0 \quad 2 A = 4 R^5 \quad \underline{L = 2 R}$$

$$\frac{d^2 F}{dR^2} \text{ étant } > 0, \frac{dF}{dR} \text{ correspond bien à un minimum.}$$

Le balancier remplissant ces conditions serait donc à section carrée suivant une coupe passant par son axe de rotation.

Quant au balancier coupé à vis, le seul utilisé en chronométrie de haute précision, la solution paraît plus délicate. Il ressort cependant des fig. 39 et 40, qu'à la pression ordinaire l'effet sur la période est sensiblement atténué par la présence d'une enceinte entourant le balancier à faible distance. L'amplitude, quoique un peu diminuée, dépend de nouveau beaucoup moins de la pression. Nul doute que des recherches orientées dans cette direction ne soient d'un grand intérêt pour la chronométrie.

Laboratoire suisse de recherches horlogères
29 mai 1947

BIBLIOGRAPHIE

Influence de la pression sur la marche des montres

1. G. Harvey Edinburgh Jour. of Sc., 1, 73, (1824)
2. J. Hilfiker Bull. Soc. neuchâtel. Sc. nat., 17, 3 (1889)
3. C. Guillaume Journ. suisse d'horl., 13, 330 (1889)
4. P. Ditisheim Journ. suisse d'horl., 28, 177 (1903)
5. P. Ditisheim C. R., 137, 700 (1903)
6. Ch.-Ed. Guillaume Rev. internationale d'horl., La Chaux-de-Fonds, 5, 139, (1904)
7. Ch. Chree The nat. phys. Laboratory (Coll. Res.) 3, 269 (1908)
8. P. Ditisheim Rev. internationale d'horl., La Chaux-de-Fonds, 22, 1493 (1921)
9. A. Hérique Bull. chron. Observ. Besançon, (1913-1924), Mém. 3, 47
10. G. Arcay Bull. chron. Observ. Besançon, (1913-1924), Mém. 6, 1
11. Mission Lecarme Journ. suisse d'horl. 48, 263 au Mont-Blanc (1923)
12. P. Ditisheim Rev. internationale d'horl., 25, No 2, page XXIX (1924)
13. A. Jaquerod Journ. suisse d'horl., 50, 50 (1924)
14. L. Arndt Journ. suisse d'horl., 50, 193 (1925)
15. A. Jaquerod Arch. Sc. phys. et nat., Genève, 8, 93 (1926)
16. A. Jaquerod- Arch. Sc. phys. et nat., Genève, H. Mügeli 8, 241 (1926)
17. P. Ditisheim Ann. françaises de Chron., 8, 269 (1938)
18. E. Guyot Bull. Soc. suisse Chron., 37 (1938)
19. E. Guyot Journ. suisse d'horl., 65, 218 (1940)
20. E. Guyot Journ. suisse d'horl., 69, 433 (1944)
21. P. Ditisheim Journ. suisse d'horl., 69, 254 (1944)

Viscosité des fluides

22. O.-E. Meyer Ann. der Phys., 113, 55 (1861)
23. O.-E. Meyer Ann. der Phys., 32, 642 (1887)
24. J.-C. Maxwell Phil. Trans. London, 156, 249 (1866)
25. F.-M. Pedersen Phys. Rev., 25, 249 (1907)
26. F.-G. Reynolds Phys. Rev., 18, 419 (1904)

27. H. Vogel Ann. der Phys., (4), 43, 1252 (1914)
28. A. van Itterbeek- Physica, 2, 97 (1935) W.-H. Keesom
29. A. van Itterbeek- Physica, 3, 275 (1936) A. Claes
30. A. van Itterbeek- Physica, 5, 257 (1938) W.-H. Keesom
31. A. van Itterbeek- Physica, 5, 938 (1938) A. Claes
32. A. van Itterbeek- Physica, 5, 1009 (1938) O. van Paemel
33. A. van Itterbeek- Physica, 7, 273 (1940) O. van Paemel
34. F.-E. Hoare Phil. Mag., (7), 8, 899 (1929)
35. R.-V. Wagner Phil. Mag., (6), 48, 847 (1934)
36. A. Kundt- Ann. der Phys., 155, 337 (1875) E. Warburg
37. J.-L. Hogg Phil. Mag., (6), 19, 376 (1910)
38. G. Kellström Phil. Mag., (7), 23, 313 (1937)
39. J.-A. Bearden Phys. Rev., 56, 1023 (1939)
40. B.-P. Sutherland- Phys. Ber., 13, 1479 (1932) O. Maass
41. Int. Crit. Tables New-York (1929), 5, 2

Divers

42. R. Lavest Journ. suisse d'horl., 67, 17 (1942)
43. A. Foch-J. Bariol C. R., 193, 835 (1931)
44. Yee-Tak-Yu Physics, 13, 66 (1942)

Ouvrages généraux

45. M. Brillouin Leçons sur la viscosité des gaz, Gauthier-Villars, Paris 1907
46. H. Bouasse Hydrodynamique générale (Bibliothèque de l'ingénieur et du physicien), Delagrave, Paris 1928
47. H. Bouasse Pendule, spiral, diapason, (Bibliothèque de l'ingénieur et du physicien), tome I, Delagrave, Paris 1920
48. H. Bouasse (id.) tome II, Delagrave, Paris 1920
49. H. Bouasse Résistance des fluides (Bibl. de l'ingénieur et du physicien), Delagrave, Paris 1928

